XIX Encuentro Internacional de Matemáticas

8, 9 y 10 de Noviembre.

EIMAT
2023

XIX Encuentro Internacional de Matemáticas

Memorias EIMAT-2023

Editado por:

Adolfo Pimienta
Nicolle Guzmán
Tovias Castro

https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/publicaciones

Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

XIX Encuentro Internacional de Matemáticas

Memorias EIMAT-2023

Editado por:

Adolfo Pimienta
Nicolle Guzmán
Tovias Castro

https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/publicaciones

ISSN:2346-1594

Noviembre 8, 9 y 10 de 2023

Universidad del Atlántico

Programa de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas

Universidad del Atlántico, Carrera 30 Número 8-49, Puerto Colombia - Atlántico

Editorial

El Encuentro Internacional de Matemáticas, conocido como EIMAT, es un evento de gran importancia, que tiene como objetivo principal la divulgación de trabajos matemáticos y afines realizados por investigadores tanto nacionales como internacionales, contribuyendo a la actualización académica de diversos profesionales en el campo de las matemáticas. A lo largo de los años, el EIMAT ha logrado integrar con éxito la comunidad matemática de la Universidad del Atlántico con la comunidad internacional, fortaleciendo los lazos de colaboración y conocimiento en este campo. En la edición de 2023, destacados profesores de países como España, Estados Unidos, México, Ecuador, Venezuela, entre otros, compartieron sus investigaciones y conocimientos con estudiantes y colegas de la región y el país. Como todos los años, el congreso ha servido como una plataforma fundamental para dar a conocer resultados obtenidos por estudiantes tanto del programa de pregrado en matemáticas así como también de la maestría en ciencias matemáticas, fomentando de esta manera la cultura de la investigación en nuestros programas. Además, se ha aprovechado esta ocasión especial para celebrar y homenajear al destacado profesor Boris Lora Castro, quien ha contribuido de manera significativa al desarrollo de la matemática en el programa y en la comunidad académica de la región. Durante el evento, se presentaron conferencias de alto nivel, cursillos relevantes y conferencias magistrales bien estructuradas. Se contó con la participación del destacado matemático de la región Caribe, el doctor Juan Carlos Galvis, elevando la calidad y el prestigio del congreso. El éxito del EIMAT 2023 como espacio de encuentro, aprendizaje y colaboración destaca su importancia para la comunidad académica. Esperamos que el EIMAT 2024 sea igualmente exitoso y continúe promoviendo la excelencia académica e investigación en matemáticas. Agradecemos a los conferencistas nacionales, a las unidades académicas y a los estudiantes por su contribución al éxito del evento. Un agradecimiento especial a la profesora Margarita Gary, cuyo valor, entrega, disciplina, organización y dedicación han sido fundamentales para el desarrollo y la excelencia del congreso. Su labor es reconocida y apreciada por todos los involucrados en el EIMAT.

Sinceramente,

Carlos Araujo Martínez

Encuentro Internacional de Matemáticas EIMAT-2023

Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

Memorias EIMAT-2023

Volumen 13, Nro 1 Año 2023
ISSN: 2346-1594

Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

Información General

Presentación

El **XIX Encuentro Internacional de Matemáticas** (**EIMAT 2023**) que se llevó a cabo del 8 al 10 de noviembre en la sede norte de la Universidad del Atlántico tiene como objetivo utilizar las Matemáticas para compartir experiencias concretas de la modelación y la resolución de situaciones problemáticas vistas desde diferentes contextos. El evento incluye conferencias y cursillos dirigidos por profesores investigadores nacionales e internacionales, y todos los temas son de gran interés para estudiantes y profesores.

Comité Organizador

- **Adolfo Pimienta Acosta**
- **Alberto Reyes Linero**
- **Alfredo Roa Narváez**
- **Carlos Araujo Martínez**
- **Kennedy Hurtado Ibarra**
- **Margarita Gary Gutiérrez**
- **Tovias Castro Polo**
- **Yesneri Zuleta Saldarriaga**

Comité Logístico

- **Alexander Gutiérrez puche**
- **Alexander López Segrera**
- **Ana Hernández Anaya**
- **Ashley Carolina Colón**
- **Alirio Gerardino Morales**
- **Carmen Quintero Villarreal**
- **Carolay Stand Rodríguez**
- **Cristian David Salina Cassiani**
- **Deivis Rodríguez Cuadro**
- **Eddie Rodríguez Bossio**
- **Estibalitz Hoyos Manzano**
- **Fredy Soto Valencia**
- **Jairo Jose Guzmán Arias**
- **José Luís Mendoza**
- **José Márquez Arrieta**
- **Josué Polo Cantillo**
- **Juliana Vargas Sánchez**
- **Luis Siado Castañeda**
- **María Serje Arias**
- **Martín Martínez Palmera**
- **Samuel Suárez Cabarcas**
- **Wendy Martínez Silva**
- **Wilmer J. Gerónimo Marmolejo**

EIMAT
Encuentro Internacional de Matemáticas

Índice general

Capítulo 1
Modelo matemático que describe el proceso de secado de café

César Acosta Minoli, Mónica Mesa Mazo, Paulo Carmona Tabares

Resumen

Drying is one of the most common processes for the preservation of agricultural products. Particularly for Coffee, a proper drying process is important for both cup quality and therefore better economic compensation to the farmer. In farmer regions of Colombia even though there are plenty of technological devices and methods to improve the drying process, farmers in small family farms rely mostly on the farm sun drying as the main method for the drying process. However, this method depends highly on weather conditions leading to a lot of uncertainty in the process.

The drying process is directly related to heat transfer and mass transfer phenomena. To describe mathematically the drying process of the coffee bean, we consider spatial and temporal variation. and several variables parameters to take into consideration mainly related to temperature and the relative humidity of the drying air.

In this work, we propose a model for the drying process of coffee in farms that use sun drying as the main method. We will rely on a device that allows us to obtain the relative wet basis moisture to obtain data and an experimental design to collect it.

section*Palabras Claves The drying process, coffee, relative wet basis moisture measure.

Universidad del Quindío, Armenia, Colombia, e-mail: cminoli@uniquindio.edu.co, jmgarcia@uniquindio.edu.co,mjmesa@uniquindio.edu.co

Referencias

1. Muhlbauer, W. and Muller J. (2020), Drying Atlas, Drying kinetics and Quality agricultural products, Elsevier.
2. Isquierdo E, Borém F, De Andrade E,(2019), Drying kinetics and quality natural coffee. Transactions of the ASABE.

Capítulo 2
Educación económica y financiera en familias de estudiantes en etapa escolar con condición socioeconómica vulnerable

Michael Aguas P., Sonia Valbuena D., David Berrio V

Resumen

La Educación Económica y Financiera (EEF) se ha convertido en uno de los ejes fundamentales para el sector educativo y bancario; pues el desarrollo y sostenibilidad de una economía sana de las personas se relaciona con el conocimiento y dominio que estas tengan sobre el manejo de sus recursos y del aprovechamiento que hagan de las ofertas de los servicios del sistema financiero. En este sentido, esta investigación en clases de matemáticas desarrolla un programa de formación en EEF para las familias y sus hijos en etapa escolar para ponderar habilidades y competencias para el manejo adecuado de sus finanzas personales y familiares; buscando fomentar una mejor calidad de vida y bienestar económico para sus miembros, como también, adquirir conocimientos que les ayude desarrollar su rol de padres activos en la formación de sus hijos e hijas en el ambito económico y financiero.

Palabras Claves

Educación Económica y Financiera, finanzas personales y familiares.

Referencias

1. Pabuena H., Berrio J., Valbuena S. (2023). *Familia y contexto escolar con tecnología en la Educación Económica y Financiera*. Revista Cedotic, 8(1). 37-56.
2. Rodriguez O. C., Sanchez T. F., Zamora R. S. (2021). *On the Radio: Effectiveness of the Viva Seguro Financial Education Program*. CEDE. 10(1).

I.E.D Comunitaria Metropolitana, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 3
Estados de equilibrio para endomorfismos parcialmente hiperbólicos

Carlos F. Álvarez, Marisa Cantarino

Resumen

Los estados de equilibrio son estudiados en la mecánica estadística y son útiles para calcular la energía libre de un sistema dinámico. En este charla estudiaremos un resultado sobre la existencia de estados de equilibrio para una clase de sistemas dinámicos. Tal clase de sistemas son no invertibles y tiene un comportamiento parcialmente hiperbólicos. El espacio tangente de estos sistemas admite tres direcciones: una expansora, otra contractora y una intermedia (central). Esencialmente, daremos una idea de la demostración del siguiente teorema:

Teorema (-,Cantarino 2023). For M a closed Riemannian manifold, if $f : M \to M$ is a C^1 partially hyperbolic endomorphism with one-dimensional center bundle, then there is an equilibrium state for (f, ϕ), for any continuous potential $\phi : M \to \mathbb{R}$.

Este es un trabajo en conjunto con Marisa Cantarino de Monash University (Australia).

Palabras Claves

Estado de equilibrio; endomorfismos parcialmente hiperbólicos.

Universidad del Sinú & Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Cartagena, Colombia-Valparaiso, chile, e-mail: carlosfalvarez@unisinu.edu.co

Referencias

1. Carlos F. Álvarez and Marisa Cantarino. Equilibrium states for partially hyperbolic maps with one-dimensional center. To appear in Journal of Statistical Physics (2023).
2. Rufus Bowen. Some systems with unique equilibrium states. In: Math. Systems Theory 8.3 (1974/75).
3. Layne Hall and Andy Hammerlindl. Partially hyperbolic surface endomorphisms. In: Ergodic Theory and Dynamical Systems 41.1 (2021),pp. 272-282.

Capítulo 4
La Comprensión Lectora del Lenguaje Matemático

Hernando Arrieta Meza

Resumen

Los estudios investigativos de los últimos veinte años de la brecha educacional entre estudiantes latinoamericanos, asiáticos o europeos siguen vigentes. Los resultados de las pruebas (PISA por sus siglas en inglés) muestran que los países de América Latina evaluados han obtenido una clasificación inferior a la del promedio de países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). El presente escrito tiene como propósito compartir con la comunidad académica, el producto del trabajo "la comprensión lectora del lenguaje matemático" como estrategia didáctica innovadora para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con el fin de mejorar la práctica educativa actual. Para observar el fenómeno planteado, se realiza una investigación bajo el paradigma epistémico interpretativo cualitativo, con diseño no experimental y método de sistematización de experiencias, con apoyo de la fenomenología, etnografía y la investigación participativa. La población de la investigación es la Básica Secundaria y la Media. El instrumento para la recolección de la información es la Bitácora. El desarrollo de esta investigación demuestra la necesidad de poner en práctica un proceso metodológico para la enseñanza de las matemáticas apoyado en la transposición didáctica, la comprensión lectora del lenguaje matemático, la resolución de problemas y la lúdica; evidenciando que los contenidos abstractos de la matemática son comprendidos más fácilmente por los estudiantes cuando se articulan a situaciones de la vida cotidiana.

Palabras Claves

Transposición didáctica. Comprensión lectora. Resolución de problemas.

IED Liceo Celedón, Santa Marta-Colombia, e-mail: nandoarriet@hotmail.com

Referencias

1. Barrows, H. S. (1986) *A taxonomy of problem-based learning methods. Medical education*. Academic Press Inc., New York, EEUU. Vol. 20 (6), (Pag. 481-486).
2. Brosseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* . Buenos aires: Editorial Zorzal-ISBN: 978-987-599-035-7. Traducción de FREGONA, Dilma.
3. Chevallard, Y. (1985) *La transposición didáctica; del saber sabio al saber enseñado., Paris, El pensamiento salvaje.* https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad3.pdf
4. Duval, R. Sáenz, L (2016) *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionada.* . Bogotá Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 264 páginas ; ISBN 978-958-8972-31-2
5. OECD (2003) *The PISA 2003 assessment framework. Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. París: OECD.

Capítulo 5
Polinomios discretos generalizados tipo U–Mittag-Leffler

Aberth Avilez Aldana, Alejandro Urieles

Resumen

En este trabajo, se presenta una nueva familia de polinomios discretos generalizados, conocidos como polinomios tipo U-Mittag-Leffer, y se denotan como $\mathcal{V}_n^{N-1}(x;\beta)$. Estos polinomios representan una interesante extensión de los polinomios de Mittag-Leffler que son de gran relevancia en diversos campos de las matemáticas y la física. En este estudio, se explorará esta nueva familia de polinomios, analizando sus propiedades algebraicas y diferenciales, y se demostrará una relación fundamental de ortogonalidad asociada a la función generatriz de estos polinomios.

Los polinomios tipo U-Mittag-Leffer son una generalización de los polinomios de Mittag-Leffler que han demostrado ser de gran utilidad en la modelización de fenómenos complejos en matemáticas aplicadas y física teórica. La introducción de esta nueva familia de polinomios amplía aún más el conjunto de herramientas disponibles para abordar una variedad de problemas en estos campos.

Las propiedades algebraicas y diferenciales son una parte fundamental de este trabajo donde se hace el análisis de dichas propiedades.

Estas propiedades son esenciales para comprender su comportamiento y su aplicabilidad en diversos contextos matemáticos y físicos, también se investigarán sus relaciones con otras familias de polinomios conocidas. Además, se abordarán aspectos relacionados con su derivación, lo que permitirá una comprensión más profunda de su comportamiento en ecuaciones diferenciales.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: aavileza@mail.uniatlantico.edu.co, alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Un hallazgo significativo en este trabajo es la demostración de una relación de ortogonalidad asociada a la función generatriz de los polinomios tipo U-Mittag-Leffer. Esta relación de ortogonalidad es de suma importancia, ya que abre nuevas posibilidades para la aplicación de estos polinomios en la solución de ecuaciones diferenciales y la aproximación de funciones.

Palabras Claves

Nuevos polinomios U-Mittag-Leffler, función generatriz, función digamma, función de números armónicos generalizados, diferenciación y ortogonalidad.

Referencias

1. Chihara, T.S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York.
2. Kim, D. & Kim, T. (2015). *"Korobov polynomials of the third kind and of the fourth kind"*. SpringerPlus, p. 23.
3. Nian Liang Wang & Hailong Li.(2015). *"Some identities on the Higher-order Daehee and Changhee Numbers"*. Pure and Applied Mathematics Journal. Special Issue: Mathematical Aspects of Engineering Disciplines. Vol. 4, p. 33 – 37.
4. Nikiforov. A. F, Suslov. S. K & Uvarov. V. B. (1991). *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p. 387.
5. Roman, S (1984). *The Umbral Calculus*. Academic Press, INC.
6. Urieles, A., Ortega, M., & Ramírez, W. (2018). *Una extensión. Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol-Frobenius-Euler*. Algunas aplicaciones. Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico, p. 104.

Capítulo 6
Series de Fourier y Representación Integral de los Nuevos Polinomios U-Bernoulli, U-Euler y U-Genocchi: Algunas Aplicaciones

Snaider Berdugo Mejía

Resumen

En el presente trabajo, se considerarán las propiedades de las nuevas familias de polinomios U-Bernoulli, U-Euler y U-Genocchi y se darán algunas fórmulas de recurrencia. También, encontraremos la serie de Fourier y la representación integral de estos polinomios. Por otra parte, consideraremos la serie de Fourier de las funciones periódicas tipo U-Bernoulli, U-Euler y U-Genocchi y su relación con la función Zeta de Riemann, además, dado que estas funciones coinciden con los polinomios U-Bernoulli, U-Euler y U-Genocchi sobre el intervalo $[0,1)$, mostraremos una relación entre la función Zeta de Riemann y los números U-Bernoulli, U-Euler y U-Genocchi y a partir de esta relación determinaremos una cota para cada una de las tres familias de números relacionados con estos polinomios.

Palabras Claves

Nuevos polinomios U-Bernoulli, U-Euler, U-Genocchi, Expansion de Fourier, Representación Integral, Función Zeta de Riemann.

Referencias

1. Duran, U. and Acilgoz, M. *Apostol Type (p,q)-Frobenius-Euler Polynomials and Numbers.* 2010 Mathematics Subject Classification.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: srberdugo@mail.uniatlantico.edu.co

2. Hernandes, P, Quintana, Y, Urieles, A: *About Extensions Of Generalized Apostol-type polynomials* **2014**.

3. Kim, T. *Euler Numbers and Polynomials Associated with Zeta Functions*, Abstract and Applied Analysis. Volume 2008, Article ID 581582.
4. Luo, Q-M: *Fourier expansions and integral representations for the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials*, MATHEMATICS OF COMPUTATION, volumen 78, Number 268, october 2009, pages 2193-2208, S 0025-5718(09)02230-3

5. Srivastava, H. M, Pintér,Á : *Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polinomials*, Applied Mathematics Letters 17 (2004) 375-380.

6. Folland, G. B: *Fourier analysis and its applications*, the wadsworth & Brooks/cole mathematics series. ISBN 0-534-17094-3.

Capítulo 7
Dinámica del VIH en una población que interactúa mediante una red compleja

Francisco Betancourt, Hernán Toro, Jorge García Usuga

Resumen

La Teoría de Redes Complejas es un área de la matemática con bases en la teoría clásica de grafos de las matemáticas discretas. En las últimas décadas, y gracias al surgimiento de los métodos computacionales, se ha dado un desarrollo acelerado de las técnicas de análisis y se han encontrado múltiples aplicaciones a diversos problemas de la Ciencia y la Tecnología. En este sentido, este trabajo pretende exponer la utilidad de las redes complejas para estudiar la dinámica de propagación del VIH en una población susceptible con diferentes grupos etarios y condiciones de riesgo, donde los vértices de la red representan personas; adicionalmente, se incorpora en cada vértice infectado la dinámica de infección por VIH con diferentes características en la escala inmunológica, la cual es modelada mediante un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Esta estructura multiescala del modelo permite condicionar la dinámica de propagación en la escala poblacional al estado particular inmunológico de los individuos y viceversa.

Para la implementación de la red compleja, se tomó como base una red aleatoria de tipo Barabási - Albert [3][2][7] con un parámetro $k = 8$, indicando un numero promedio de conexiones, es decir, cada nodo de la red representa una persona, y en promedio cada persona tiene de media 8 posibles parejas sexuales. La cantidad de nodos fue de 450.000.

En la Figura 7.1 muestra la distribución de grado de los nodos de la red, en la cual, los nodos de bajo grado, es decir, los que presentan un numero bajo de conexiones son más numerosos; mientras que los nodos de grado alto son poco frecuentes.

Universidad del Quindío, Armenia-Colombia, e-mail: fabetancourt@uniquindio.edu.co, hdtoro@uniquindio.edu.co, jmgarcia@uniquindio.edu.co

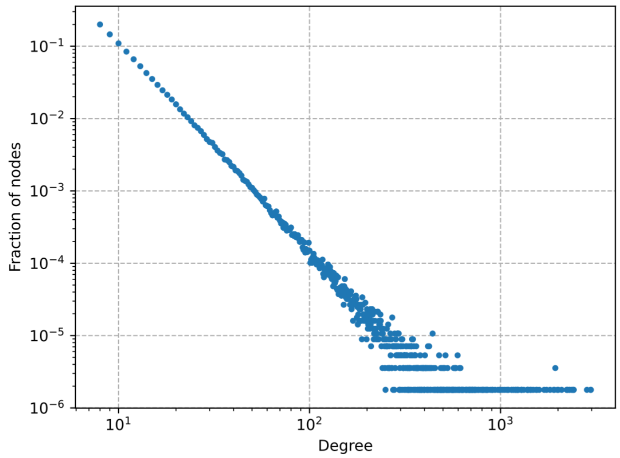

Figura 7.1 Distribución de grado de los nodos de la red.

Ahora bien, en este trabajo, para simular el contagio entre personas (nodos de la red), se propone un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias para la dinámica de interacción del VIH con el sistema inmunológico de una persona infectada (nodos infectados). El modelo permite describir en términos de concentración promedio los niveles de células T CD4 susceptibles a la infección $T = T(t)$, células T CD4$^+$ infectadas $T^* = T^*(t)$, células T CD8 supresoras $C = C(t)$, carga viral $V = V(t)$ y carga viral no infecciosa $W = W(t)$ de cada individuo a lo largo del tiempo t. N Número promedio de producción viral; c Tasa de eliminación del virus; β Tasa de infección de las células T CD4$^+$ susceptibles; σ Tasa de producción constante de células T CD4$^+$; μ Tasa de muerte natural de las células T CD4$^+$ no infectadas; δ Tasa de muerte de las células T CD4$^+$ infectadas por causa de la infección; λ Tasa de proliferación de células T CD8$^+$ activas; ω Tasa de mortalidad de las células T CD8$^+$ activas; α Tasa de muerte por acción citotóxica; u Terapia combinada de ITI e IP; por otro lado las variables de efectividad de las terapias para el modelo inmunológico de VIH: $\varepsilon_1 \in [0, 1]$ efectividad inhibidores de la transcriptasa inversa, clase de medicamentos antirretrovirales que se usan para tratar la infección por VIH al inhibir el proceso de transcripción inversa y $\varepsilon_2 \in [0, 1]$ efectividad inhibidores de la proteasa, clase de medicamentos antivirales que se usan ampliamente para tratar el VIH/SIDA al inhibir la producción de la enzima proteasa necesaria para la producción de partículas virales infecciosas [8].

Con lo que se ha discutido hasta ahora, se describe un modelo completo que permite que el virus se establezca en el sistema inmune de una persona infectada.

$$
\begin{cases}
\dot{T} = \sigma - \beta\,(1-\varepsilon_1 u)\,TV - \mu T \\
\dot{T}^* = \beta\,(1-\varepsilon_1 u)\,TV - \dfrac{\alpha T^*}{1+\alpha T^*}C - \delta T^* \\
\dot{C} = \lambda T^* - \omega C \\
\dot{V} = N\delta\,(1-\varepsilon_2 u)\,T^* - cV \\
\dot{W} = N\delta\varepsilon_2 u T^* - cW,
\end{cases}
\tag{7.0.1}
$$

que está sujeto a condiciones iniciales no negativas. Además está definido en el espacio de parámetros $\Theta = \{\sigma, \mu, \beta, \delta, \alpha, \lambda, \omega, c\}$ donde $\sigma > 0, 0 < \mu \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < \delta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1, \lambda > 0, 0 < \omega \leq 1$ y $0 < c \leq 1$.

Con la red compleja y el modelo planteado en 7.0.1, se simuló durante 500 días con 450.000 nodos y sólo un infectado inicial el primer día. La población de los mismos esta dividida en niños, adolescentes, adultos y ancianos; cada uno de los grupos de personas (nodos) tienen características diferentes que eventualmente los hace más o menos susceptibles al contagio. La figura 7.2 muestra el resultado de una simulación que se tomó 500 días:

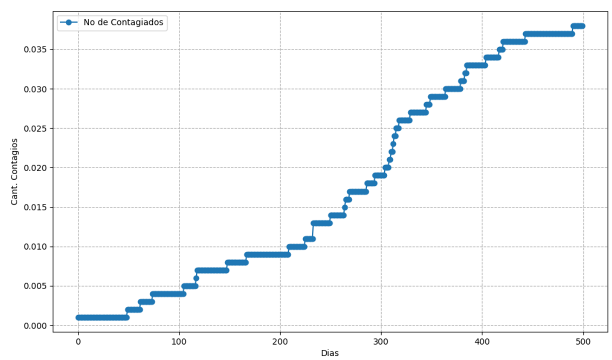

Figura 7.2 Simulación con la red compleja de 450.000 personas acoplada al sistema 7.0.1, con individuo inicial un adulto entre 28 y 42 años.

En la figura 7.2, la simulación muestra que la enfermedad se extiende rápidamente cuando se toma un nodo (persona) con edad adulta. Ahora bien, si el individuo inicial se toma un niño con edades entre los 0 y los 4 años la dinámica no es la misma.

En la figura 7.3 se muestra que si escoge un niño como individuo inicial, es muy poco probable que este contagie a otras personas; por esta razón, la simulación muestra que la persona contagiada al inicio de la simulación, no aumenta durante el tiempo estipulado.

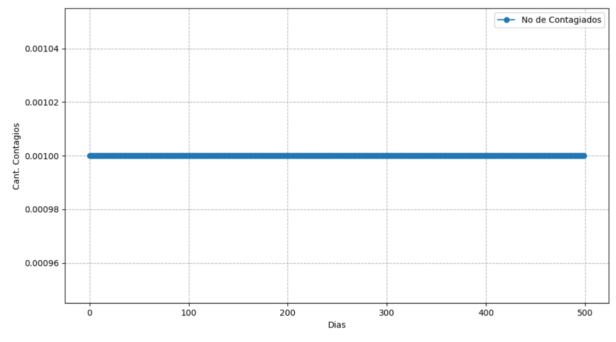

Figura 7.3 Simulación con la red compleja de 450.000 personas acoplada al sistema 7.0.1, con un niño como individuo inicial.

Palabras Claves

VIH, SIDA, redes complejas, dinámica poblacional.

Referencias

1. Álvar Net Castel, E. Quintana Tort-Martorell, *Infecciones en el paciente crítico*, Barcelona: Springer Verlag Ibérica, D.L. (1997), ISBN 84-07-00176-7.
2. Barabási, A. L. and Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks, Science 286, pp 509-512.
3. Barabási, A.-L. (2016). *Network Science*. Cambridge University Press.
4. Caldarelli, G., & Vespignani, A. (2007).*Scale-Free Networks*. Oxford University Press.
5. Diekmann, Odo and Dietz, K and Heesterbeek, Johan Andre Peter, *The basic reproduction ratio for sexually transmitted diseases: I. Theoretical considerations*, Mathematical biosciences, Elsevier, 107, 2 - (1992) pp. 325-339.
6. Estrada, E., & Knight, P. A. (2015). *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*. Cambridge University Press.
7. Newman, M. (2010). *Networks: An Introduction*. Oxford University Press.
8. Moreno Álvarez, Aroa, *HIV/AIDS Study. Bibliographic review of the virus and mathematical models.*, Universitat Politècnica de Catalunya, B.S. thesis 67 (2020).
9. Newman, M. (2006). *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press.
10. Patiño, Beatriz Elena Vinasco, *Inmunología de rojas (14a edición)*, Iatreia, 2, 20 (2007), pp. 209-212.
11. Rojas-Espinosa, Oscar, *Inmunología (de memoria).* Ed. Médica Panamericana (2006).
12. Van den Driessche, Pauline and Watmough, James, *Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission).* Mathematical biosciences, Elsevier 1-2, 180 (2002), pp. 29-48.

Capítulo 8
Ecuación de Advección–Difusión incluyendo transporte advectivo evolutivo

Paulo Carmona Tabares, Willy Mora Botero

Resumen

El fenómeno de dispersión de agentes contaminantes en cuerpos de agua superficiales ha sido ampliamente estudiado y modelado mediante ecuaciones diferenciales parciales (EDP'S), en particular, mediante una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico llamada **Ecuación Difusión–Advección**, [2]. Entre las características que definen dicha ecuación, el término difusivo permite cuantificar la forma como un contaminante se dispersa por un medio acuático obedeciendo los principios del movimiento Browniano[1] y la primera ley de Fick[2], [4]. Para el término del transporte advectivo, que se representa en la ecuación mediante un campo de velocidades, generalmente se considera constante o estacionario. Sin embargo, la inclusión de un campo de velocidades evolutivo (dependiente del tiempo), puede generar mayores prestaciones al modelamiento del fenómeno.

En este trabajo se presenta la manera como se incorpora el transporte advectivo evolutivo dentro de la ecuación de Advección–Difusión, mediante la inclusión de la solución numérica de la ecuación de Stokes (forma simplificada de las ecuaciones de Navier–Stokes),[3]; empleando el Método de Crank–Nicolson [3], que corresponde a un método de diferencias finitas ampliamente utilizado para la resolución numérica de la ecuación de Advección–Difusión.

Finalmente, se muestran algunas simulaciones realizadas en MATLAB que permiten visualizar el efecto del transporte advectivo evolutivo, dentro de un problema de valores y iniciales y de frontera en un dominio bidimensional.

Universidad del Quindío, Armenia, Colombia, e-mail: paulocct@uniquindio.edu.co, wmora@uniquindio.edu.co

[1] Movimiento aleatorio de las partículas dentro de un fluido.

[2] En un fluido, las partículas se mueven desde los lugares de mayor concentración hacia los lugares de menor concentración.

Palabras Claves

Ecuación de Advección-Difusión, método de diferencias finitas, método de Crank–Nicolson.

Referencias

1. Chorin, A. J. (1968) *Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations*. Courant Institute of Mathematical Sciences.
2. Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion.* Second Edition, Clarendon press-oxford.
3. Crank, J. & Nicolson, P. *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type.* Proc.Camb. Phil. Soc. 43 (1): 50–67. 1947.
4. Fick A. (1995.) On Liquid Diffusion, *Journal of Membrane Science*, 100, 13-38.
5. Ledesma, A. C. & Bernal, O. M. (2015). *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional.* Facultad de Ciencias, UNAM.

Capítulo 9
Multifunciones faintly (I, J)-continuas en espacios ideal-topológicos

Carlos Carpintero Figueroa

Resumen

Kuratowski [3] introduce el concepto de espacio ideal-topológico, noción empleada por Vaidyanathaswamy en [4] para introducir la función local de un subconjunto $A \subseteq X$ en un espacio topológico (X, τ), como sigue: $A^*(\tau, I) = \{x \in X : U \cap A \notin I \text{ para cada } U \in \tau_x\}$, donde I es un ideal topológico en (X, τ) y $\tau_x = \{U \in \tau : x \in U\}$. En base a la función local, un operador clausura de Kuratowski es definido según $cl^*(A) = A \cup A^*(\tau, I)$, con $A \subseteq X$, el cual determina una topología $\tau^*(\tau, I)$, llamada *-topología. En 1990, Jankovic y Hamlett [2], introducen la noción de conjunto I-abierto, considerando un ideal I en un espacio topológico (X, τ) ($S \subseteq X$ es I-abierto, si $S \subseteq \mathrm{int}(cl^*(S))$). La familia de todos los conjuntos I-abiertos es denotada por $IO(X)$. Empleando esta clase de conjuntos, definimos nociones de multifunción $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ superior (resp., inferior) faintly (I, J)-continua, donde (X, τ, I) y (Y, σ, J) son sendos espacios ideales-topológicos. En esta ponencia presentamos [1], algunas caracterizaciones para las nociones de multifunción superior (resp., inferior) faintly (I, J)-continua sobre espacios ideales-topológicos y analizamos sus relaciones con las multifunciones (I, J)-continuas.

Palabras Claves

Multifunción superior faintly (I, J)-continua, multifunción inferior faintly (I, J)-continua, conjunto θ^*-abierto.

Corporación Universitaria del Caribe-CECAR, Sincelejo, Colombia, e-mail: carlos.carpinterof@cecar.edu.co

Referencias

1. Carpintero, C.R. Ennis, R. R y Sanabria, J.E. (2023) "Faintly (I, J)-continuous multifunctions in ideal topological spaces". Enviado a *Songklanakarin Journal of Science and Technology*.
2. Jankovic, D. S. y T. R. Hamlett, T.R. (1990) "New Topologies From Old via Ideals". *Amer. Math. Montly* V. 97(4), 295-310.
3. Kuratowski, K. (1966) *Topology*. Academic Press., New York, EEUU.
4. Vaidyanathaswamy, R. (1945) "The localisation theory in set topology". *Proc. Indian Acad. Sci* V. 20, 51-61.

Capítulo 10
New Decomposition forms of bioperation-continuity

C. Carpintero, N. Rajesh, E. Rosas, J. Vielma

Resumen

In this paper, we introduced, studied and characterized some new types of sets via bioperation and using these sets, we obtained a new decomposition forms of bioperation-continuity and finally using the notions of bioperation some well known concepts of continuity are generalized.

Palabras Claves

Topological spaces, (γ, γ')-open set.

Referencias

1. Abd El-Monsef, M.E., El-Deep, S.N. and Mahmood, R.A. (1983) β-open sets and β-continuous mappings, *Bul. Fac. Sci. Assiut Univ* V 12, 77-90.
2. Andrijevic, D. (1986) semi preopen sets, *Math. Vesnick*, **38** , 24-32.
3. Carpintero, C., Rajesh, N. and Rosas, E. (2011) On a clas of (γ, γ')-preopen sets in a topological space, *Fasciculi Mathematici* V 45, 25-35.
4. Carpintero, C., Nirmala, R., Rajesh, N. and Rosas, E. (2020) On Decomposition of Bioperation-Continuity. *Comptes rendus de ÍAcadémie bulgare des Sciences* Tóme 73,(4), 443-450.
5. Kasahara, S. (1979) Operation-compact spaces, *Math. Japonica* V 24, 97-105.

Corporación Universitaria del Caribe-CECAR, Sincelejo, Colombia. Rajah Serfoji Govt. College, Thanjavur-613005, Tamilnadu, India. Universidad De Oriente, Nucleo De Sucre Cumana, Venezuela. Universidad de la Costa, Barranquilla, Colombia. Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador. e-mail: carlos.carpinterof@cecar.edu.co,nrajesh_topology@yahoo.co.in,ennisrafael@gmail.com,jevielma@espol.edu.ec

6. Levine, N. (1963) semi open sets and semi continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* V 70, 36-41.
7. Mashbour, A. S., Abd-El-Monsef, M. E. and ElDeep, S. N. (1982) On precontinuous and precontinuous mappings, *Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt* V 53, 47-52.
8. Mashbour, A. S., Abd-El-Monsef, M. E. and ElDeep, S. N. (1982) α-continuous and α-open mapping, *Acta Math. Hungar.* V 3, 213-218.
9. Nirmala, R. and Rajesh, N. (2016) Bioperation-regular open sets, *Aryabhata J. Math. Infor.* V 8(1), 53-62.
10. Nirmala, R. and Rajesh, N. Generalization of semiopen sets via bioperation (under preparation).
11. Ogata, H. and Maki, H. (1993) Bioperation on topological spaces, *Math. Japonica* V 38(5), 981-985.
12. Reilly, I. L. and Vamanamunty, M. (1996) On α-continuity in topological spaces, *J. Indian Acad. Math.* V 18, 89-99.
13. Tong, J. (1986) A decomposition of continuity, *Acta Math. Hungar.* V 48, 11-15.
14. Umehara, J., Maki, H. and Noiri, T. (1992) Bioperation on topological spaces and some separation axioms, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (A)* V 3, 45-59

Capítulo 11
Modelamiento de Códigos de Hamming

Mará Carranza, Sebastian Peña, Jorge Robinson

Resumen

Los Códigos de Hamming son los mas prácticos códigos lineales detectores y correctores de errores. En este trabajo modelaremos computacionalmente los mas conocidos códigos de Hamming de forma tal que puedan ser construidos y visualizados con sus principales propiedades. Aplicaremos algoritmos que permitan construir códigos binarios de Hamming, códigos equivalentes, códigos duales y códigos monomialmente equivalentes. Usaremos estas construcciones para modelar los principales teoremas y obtener nuevos códigos y parámetros a partir de ellos.

Palabras Claves

Códigos de Hamming. Código dual.

Referencias

1. W. Cary Huffman, Vera Pless. *Fundamentals of Error Correcting Codes*. Cambridge University Press.
2. San Ling, Chaoping Xing. *Coding Theory.* Cambridge University Press.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: mjcarranza@mail.uniatlantico.edu.co, salejandropena@mail.uniatlantico.edu.co, jogerobinson@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 12
Acotación de la Transformada de Laplace entre espacios de Lebesgue

Héctor Camilo Chaparro Gutiérrez

Resumen

La transformada de Laplace es ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales), siendo así una herramienta útil no sólo para matemáticos sino también para físicos e ingenieros. También es utilizada en teoría de la Probabilidad (e.g. [1], [3] y [4]).

En esta charla, discutiremos sobre la acotación de la transformada de Laplace $\mathcal{L} : L_p([0,\infty)) \to L_p(A)$ $(p \geq 1)$ para los casos $A = [0,\infty)$, $A = [1,\infty)$ y $A = [0,1]$. También daremos ejemplos para los casos en los cuales $\mathcal{L}$ no es acotada. Más precisamente, damos los detalles de los resultados que aparecen en [2].

Palabras Claves

Transformada integral, Transformada de Laplace, Espacios de Lebesgue.

Referencias

1. Abate, J. and Whitt, W, *An operational calculus for probability distributions via Laplace transforms*, Adv. in Appl. Probab. 28 (1996), no. 1, 75-113.
2. Castillo R.E., Chaparro H.C., Ramos-Fernández J.C., *L_p boundedness of the Laplace transform*. Under review.
3. Ndiku, Z., *Laplace Transform in Probability Distributions and in Pure Birth Processes*, Master's thesis (2015), University of Nairobi, Nairobi, Kenia. Retrieved from http://erepository.uonbi.ac.ke/handle/11295/95040

Universidad de Cartagena, Cartagena de Indias-Colombia, e-mail: hchaparrog@unicartagena.edu.co

4. Rossberg, A. G., *Laplace transforms of probability distributions and their inversions are easy on logarithmic scales*, J. Appl. Probab. 45 (2008), no. 2, 531-541.

Capítulo 13
Coloración de grafos y polinomio cromático.

Frandeiker Castro Julio

Resumen

La teoría de grafos es la rama de las matemáticas que estudia los grafos (o gráficas) y sus propiedades, esta teoría ha sido estudiada desde el año 1736 y se ha ido desarrollando como una rama de las matemáticas discretas con más aplicaciones en el mundo. Ha generado diversos problemas y resultados desde su inicio, como lo es el teorema de los cuatro colores y otros más que han sido importantes en la historia de las matemáticas. Un ejemplo de estos problemas, y del cual es estudio esta ponencia, es el polinomio cromático, este nos permite calcular de cuantas maneras puede ser coloreado un grafo si tenemos una cantidad de λ colores, en este trabajo se a profundidad el polinomio cromático de un grafo y sus propiedades, para esto se necesitó forjar unas bases de teoría de grafos y algo de conocimiento sobre la teoría combinatoria fundamentales, luego se desarrollaron diversas conexiones que tiene con el número cromático de un grafo mediante distintos teoremas que conectan a estos dos. Ahora, para aterrizar este problema en la actual era de la programación es importante conocer sobre la teoría de complejidad computacional, la cual estudia qué tan difícil es un problema computacionalmente y logra catalogarlo en una de las siguientes clases: P, NP, NP-completo, NP-duro. Luego de saber esto, tenemos la capacidad de establecer una estrecha relación entre el calculo del polinomio cromático de un grafo y su complejidad al momento de trasladar el problema a un ámbito computacional. Este problema tiene amplias aplicaciones al mundo como lo son la planificación de horarios, optimización de vías de tránsito y otras muy divertidas como la resolución de un sudoku.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: fcastroj@mail.uniatlantico.edu.co

Palabras Claves

Teoría de grafos, coloración, número cromático, polinomio cromático, complejidad computacional.

Referencias

1. Bondy, J. y Murty, U. (2008). *Graph Theory*. Springer London.
2. Hubai, T. (2009). *The chromatic polynomial*. Eötvös Loránd University.
3. Zhang, J. (2018). *An Introduction to Chromatic Polynomials*.
4. García, C. (2004). *Propiedades de coloración en grafos de Kneser*. Universidad de los Andes.
5. Murga, M. (2012-2013). *Coloración en Grafos*. Universidad de Cantabria.
6. Perez, A. (2014). *Métodos polinomiales para trabajar con grafos*. Universidad de Valladolid.
7. Garey, M y Johnson D. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*

Capítulo 14
Dominación distancia en producto cartesiano de trayectorias

José Luis Cosme Álvarez

Resumen

El número de dominación γ de una gráfica G es el menor número de vértices necesarios en un conjunto D, de tal manera que todo vértice fuera del conjunto D es vecino de algún vértice del conjunto D. Similarmente definimos la 2-dominación distancia γ_2 si permitimos que los vértices sean vecinos a distancia a los más dos.

En 1968 Vadim G. Vizing presentó una de las conjeturas más famosas en la dominación en gráficas (vea [2]). La ahora conocida como Conjetura de Vizing, plantea una relación entre el producto cartesiano de dos gráficas cualesquiera y el producto de sus números de dominación, esto es, para cualesquiera dos gráficas G y H, se satisface la desigualdad

$$\gamma(G)\gamma(H) \leq \gamma(G \square H).$$

En esta plática abordaremos un problema tipo Vizing que relaciona los números de dominación de dos gráficas G y H como cota superior del número de 2-dominación distancia γ_2 del producto cartesiano de gráficas, esto es

$$\gamma_2(G \square H) \leq \gamma(G)\gamma(H).$$

en particular describiremos los resultados que se tienen en trayectorias y ciclos.

Palabras Claves

Número de dominación, k-dominación distancia, Conjetura de Vizing, producto cartesiano de gráficas.

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa-México, e-mail: coal@xanum.uam.mx

Referencias

1. Brešar, B., Klavžar, S. and Rall, D. Dominating directed products of graphs, *Discrete Mathematics*, 307, 1636-1642.
2. Brešar, B., Dorbec, P., Goddard, W., Hartnell, B., Henning, M., Klavžar, S and Rall, D. (2012) Vizing's conjecture: a survey and recent results, *Journal of Graph Theory*, 69, 47-76.
3. Hammack, R., Imrich, W. and Klavžar, S. (2011)*Handbook of product Graphs*, CRC: Boca Ratón.

Capítulo 15
Encajes sobre superficies, gráficas planas y papiroflexia modular

José Luis Cosme Álvarez

Resumen

Una gráfica (o grafo) se dice plana si puede ser dibujada sobre el plano sin cruces entre sus aristas. Los poliedros han sido estudiados ampliamente a lo largo de la historia y podemos encontrar caracterizaciones de ellos en función de sus representaciones como gráficas en el plano.

En este cursillo-taller hablaremos sobre estos objetos con la ayuda de la Teoría de Gráficas. El taller está pensado para que los participantes conozcan la teoría que hay detrás de este tema y puedan construir un poliedro con papiroflexia modular.

Palabras Claves

Gráficas planas, encajes, superficies, papiroflexia modular.

Referencias

1. J. A. Bondy y U. S. R. Murty,*Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 244, Berlin: Springer, 2008
2. Chartrand G. and Zhang P., *Chromatic graph theory*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2009. xiv+483 pp. ISBN: 978-1-58488-800-0 (Reviewer: D. de Werra) 05-01
3. S.V. Matveev, Euler characteristic, Encyclopedia of Mathematics.

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa-México, e-mail: coal@xanum.uam.mx

Capítulo 16
Entrelazando Matemáticas y Física: Funciones de Green en Ecuaciones Diferenciales e Integrales

Oswaldo Dede Mejía

Resumen

Las **funciones de Green** desempeñan un papel crucial al establecer vínculos entre las **ecuaciones diferenciales** y las **ecuaciones integrales**. Estos vínculos son esenciales en la resolución de problemas de valores límite en diversos campos de la física, las matemáticas y la ingeniería.

Las funciones de Green establecen esta conexión a través:

- **Ecuaciones Diferenciales Lineales**: En muchos problemas físicos y matemáticos, las leyes fundamentales se expresan mediante ecuaciones diferenciales lineales. Estas ecuaciones involucran un **operador diferencial lineal** (como el **operador laplaciano** ∇^2) aplicado a una función desconocida. Por ejemplo, en la **ecuación de Poisson**:
$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$
donde $u(x)$ es la función que queremos encontrar y $f(x)$ es la fuente.

- **Descomposición en Términos de la Función de Green**: Las funciones de Green proporcionan una forma de descomponer la solución $u(x)$ en términos de una **integral convolutiva**. La idea principal es que, si conocemos la función de Green $G(x, x')$, podemos expresar la solución $u(x)$ como:
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{f}(\mathbf{x}')\mathbf{d}\mathbf{x}'.$$
Aquí, $G(x, x')$ actúa como el "**kernel**" que relaciona la función desconocida $u(x)$ con la fuente $f(x)$.

- **Ecuaciones Integrales**: La expresión anterior es una ecuación integral que relaciona la función $u(x)$ con la fuente $f(x)$ a través de la función de Green $G(x, x')$.

Corporación Universitaria de Ciencias Empresariales, Educación y Salud, Cra. 53 #59-70, Nte. Centro Historico, Barranquilla, Atlántico, e-mail: dedemejia@gmail.com

Este enfoque convierte la ecuación diferencial lineal original en una ecuación integral, que a menudo es más manejable y puede ser más fácil de resolver.

- **Vínculo con el Operador Diferencial**: Las funciones de Green son únicas para un **operador diferencial** y las condiciones de contorno específicas. Por lo tanto, el vínculo entre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones integrales se establece mediante la elección del operador diferencial y las condiciones de contorno apropiadas.

Las **funciones de Green** son una herramienta poderosa que permite relacionar las **ecuaciones diferenciales lineales** con las **ecuaciones integrales** correspondientes. Este enfoque es particularmente útil en la solución de problemas de valores límite en física, matemáticas y otros campos, ya que proporciona una forma sistemática de convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales para su resolución.

Palabras Claves

Funciones de Green, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, operador diferencial y condiciones de contorno.

Referencias

1. W. Arveson., *A Short Course in Spectral Theory*. Springer Verlag, Berlin, 2001.
2. P. Barreiro., *Funciones de Green y Aplicaciones en Física*. Universidad de Valladolid, 2010.
3. J. Behrndt., *Boundary Value Problems, Weyl Functions and Differential Operators*. Mon. Math., Vol. 108, Birkhäuser., 2010.
4. J. Caicedo and A. Castro., *Ecuaciones Semilineales con Espectro Discreto*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2012.
5. W. Derrick., *Métodos Topológicos en Análisis*. Sociedad Colombiana de Matemáticas, 1977.
6. K. Deimling., *Nonlinear Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
7. A. Fernádez., *Actualidad y Aplicaciones de la Topología y el Análisis Funcional*. Universidad Complutense de Madrid., 2017.
8. N. Krasnov., *Ecuaciones integrales*. Editorial MIR, Moscú., 1977.
9. D. Kreider., *Introducción al Análisis Lineal*. Fondo Educativo Interamericano, Vol 2, 1971.
10. M. Zuluaga., *Operadores integrales de Hammerstein, su espectro y aplicaciones. Rev. Col. Math. Vol XVII. 73-98, 1983.*

Capítulo 17
W-marcos asociados a un operador en espacios de Krein

Jesús Domínguez, Osmin Ferrer & Edilberto Arroyo

Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio de marcos asociados a un operador (W-marcos) en espacios de Krein. En primer lugar, se definen los marcos asociados a un operador dependiendo del adjunto del operador en el espacio de Krein. Seguidamente se muestra que la definición de marcos en espacios de Krein dada anteriormente por Mohammed, A., Samir, K., & Bounader, N. en el artículo K-frames for Krein spaces, la cual depende del adjunto del operador en el espacio de Hilbert asociado, es una consecuencia de la definición dada en esta investigación, probándose que es independiente de la descomposición fundamental y que al tener W-marcos para el espacio de Krein necesariamente se tienen W-marcos para los espacios de Hilbert que componen el espacio de Krein. Se demuestra que los proyectores ortogonales generan nuevos operadores con sus respectivos marcos. Finalmente se demuestra un teorema de equivalencia para W-marcos sin depender de la simetría fundamental, como usualmente se da en espacios Hilbert.

Palabras Claves

Métrica indefinida; espacio de Krein; marcos; W-marcos.

Universidad del Atlántico-Universidad de Sucre, Facultad de Educación y Ciencias, Departamento de Matemáticas, Sincelejo, Colombia, e-mail: jesus.dominguez@unisucrevirtual.edu.co, osmin.ferrer@unisucre.edu.co, ediarroyo17@gmail.com

Referencias

1. T. Azizov, I. Iokhvidov, Linear operators in spaces with an indefinite metric, *Pure and Applied Mathematics*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, (1989).
2. J. Bognár, Indefinite inner product spaces, *Springer*, Berlin, (1974).
3. O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, *Birkhäuser*, Boston, (2003).
4. R. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space. *Proceedings of the American Mathematical Society* **17** (1966), 413-415. https://doi.org/10.2307/2035178
5. E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, *John Wiley & Sons. Inc.*, (1978)
6. H.G. Feichtinger, T. Werther, Atomic systems for subspaces, *Proceedings SampTA*, (2001): 163-165.
7. L. Găvruţa, Frames for operator, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **32**, (2012), 139-144. https://doi.org/10.1016/j.acha.2011.07.006
8. X. Xiao, Y. Zhu, L. Găvruţa, Some properties of K-frames in Hilbert spaces. *Results in mathematics*, **63**, (2013) no 3-4, p. 1243-1255.
9. K. Esmeral and O. Ferrer, E. Wagner, Frames in Krein spaces arising from a non-regular W-metric, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, **9**, (2015), 1-16. http://doi.org/10.15352/bjma/09-1-1
10. A. Mohammed, K. Samir, and N. Bounader, K-frames for Krein spaces, *Annals of Functional Analysis*, **14**, (2023), 1-20. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00223-3
11. R. Duffin, A. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Transactions of the American Mathematical Society*, **72**, (1952), 341-366. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1952-0047179-6
12. I. Daubechies, The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, (1990), 961-1005. https://doi.org/10.1109/18.57199
13. I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *Journal of Mathematical Physics*, **27**, (1986), 1271-1283. https://doi.org/10.1063/1.527388
14. K. Gröchenig, Foundations of time-frequency analysis, *Birkhäuser*, Boston, (2001).
15. O. Ferrer, J. Domínguez, E. Arroyo, Frames associated with an operator in spaces with an indefinite metric, *AIMS Mathematics*, (2023), vol. 8, no 7, pág. 15712-15722.
16. O. Ferrer, E. Arroyo, J. Naranjo , sistemas atómicos en espacios de Krein, *Turkish Journal of Mathematics*, (2023), vol. 47, no 5, p. 1335-1349.

Capítulo 18
Polinomios discretos generalizados tipo U–Mittag-Leffler

Jorge Escalante Muñoz, Alejandro Urieles

Resumen

Este trabajo introduce una nueva familia de polinomios discretos denominados, polinomios tipo U–Bernoulli–Korobov generalizados denotados por $\mathscr{P}_n(x;\alpha)$. Se estudiarán algunas propiedades algebraicas y diferenciales. Además se demostrará una relación de ortogonalidad asociada a la función generatriz de estos nuevos polinomios dada por

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mathscr{P}_m(x\,;\alpha)\mathscr{P}_n(x\,,\alpha)\omega^{\alpha}(x;\beta) = (-\alpha)^{n-1}\, n^2\, \Gamma(n)\delta_{mn},$$

donde $\omega^{\alpha}(x;\beta)$ es la función peso discreto definida por

$$\omega^{\alpha}(x;\beta) = \frac{(-\alpha)^x\, e^{\alpha}(1-e^{\alpha\beta})^2}{x!},$$

con $\alpha < 0$, $z,\ v \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1 \in \mathrm{Re}(z)$, $\sigma_1 \in \mathrm{Re}(v)$, $\beta = \lambda_1 = \sigma_1,\ |\beta| < \frac{2\,\pi}{|\alpha|}$.

Finalmente, se definen las matrices tipo pascal para estos polinomios, denotada por, $\mathscr{M}(x;\alpha)$, teniendo en cuenta algunas de sus propiedades, deducimos la factorización de las matrices $\mathscr{M}(x;\alpha)$, $\mathscr{M}(x+y;\alpha)$ y definimos respectivamente su matriz inversa.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: jlescalante@mail.uniatlantico.edu.co, alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

Palabras Claves

Polinomios de Bernoulli, Charlier, Meixner, Hahn, Kravchuk, Korobov de primer, tercer y cuarto tipo, ortogonalidad, función generatriz y matriz tipo Pascal.

Referencias

1. Badkov, V. M. (1969) “The uniform convergence of Fourier series in orthogonal polynomials”. *Math. Notes* V. 5, 174–179.
2. Beals, R & Wong, R. (2016). *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. Cambridge University Press, p. 149 – 158.
3. Chihara, T.S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York.
4. Choi, J & Srivastava, H. M. (2012). *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals.* El sevier
5. Szegő, G. (1975). *Orthogonal Polynomials.* Coll. Publ. Amer. Math. Soc. 23, (4th ed.), Providence, R.I.
6. Urieles, A. Ramirez, W & Quintana, Y. (2019). *Generalized Apostol-Type polinomial matrix and its algebraic Properties*. Math. Repo, p. 249 – 264.
7. Urieles, A. Ramirez, W & Quintana, Y. (2020). *Euler Matrices and their Algebraic Properties Revisited*. Applied Mathematics & Information Sciences. An International Journal. 14, No. 4, p. 583 – 596.

Capítulo 19
Formas de Toeplitz radiales en Espacios de Bergman

Kevin Esmeral García

Resumen

Sea $\Pi = \{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Im} z > 0\}$ el semiplano superior del plano complejo $\mathbb{C}$ y $\lambda > -1$. El espacio $A^2_\lambda(\Pi)$ de las funciones analíticas en Π y cuadrado integrables sobre Π con respecto a la medida $\mathrm{d}V_\lambda(z) = (\lambda+1)(2\,\mathrm{Im}\, z)^\lambda \mathrm{d}z$, donde $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $z = x+iy$, se llama espacio de Bergman. Es bien conocido que $A^2_\lambda(\Pi)$ es un subespacio de Hilbert con kernel reproductor de $L_2(\Pi, \mathrm{d}V_\lambda)$ y la proyección ortogonal de $L_2(\Pi, \mathrm{d}V_\lambda)$ sobre $A^2_\lambda(\Pi)$ es llamada proyección de Bergman, ver por ejemplo [4]. Recordemos que el grupo de automorfismos de Π consiste de transformaciones de Möbius de la forma $\dfrac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - cb > 0$ y es isomorfo a $SL_2(\mathbb{R})/\{I, -I\}$, donde $SL_2(\mathbb{R})$ grupo de matrices con entradas reales con determinante 1. El teorema de descomposición de Iwasawa, $SL_2(\mathbb{R})$ puede escribirse como $SL_2(\mathbb{R}) = KAN$, donde

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} : r > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

son subgrupos maximales de $SL_2(\mathbb{R})$, por tal motivo, dicha descomposición permite definir sobre $A^2_\lambda(\Pi)$: los siguientes operadores unitarios:

Departamento de Matemáticas, Universidad de Caldas, Colombia, e-mail: kevin.esmeral@ucaldas.edu.co

$$R_\theta f(z) = f\left(\frac{\cos\theta \cdot z - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta \cdot z + \cos\theta}\right), \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

$$\mathbf{Dil}_{\lambda,h} f(z) = h^{1+\frac{\lambda}{2}} f\left(\frac{\sqrt{h}z + 0}{0 \cdot z + \frac{1}{\sqrt{h}}}\right) = h^{1+\frac{\lambda}{2}} f(hz), \qquad h \in (0, +\infty), \tag{19.1}$$

$$\mathbf{Tr}_x f(z) = f\left(\frac{1 \cdot z + x}{0 \cdot z + 1}\right) = f(z + x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{19.2}$$

Sin embargo, el operador R_θ es mejor considerarlo sobre el espacio de Bergman sobre el disco complejo $\mathbb{D}$, debido a que $SL_2(\mathbb{R})$ actúa sobre el disco $\mathbb{D}$ por conjugación y convierte la matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Por tanto, su expresión es un poco más simple y manejable para hacer cálculos, lo denotamos por:

$$\mathbf{R}_\theta f(z) = f\left(e^{-i\theta} z\right), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{19.3}$$

En [1, 2] introducen las formas de Toeplitz relativas a familia de operadores como se sigue:

Definition 19.1 Sean $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{U} = (\mathbf{U}_\alpha)_\alpha$ una familia de operadores $\mathbf{U}_\alpha \in \mathcal{BH}$ fija. Una forma sesquilineal $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$ se dice ser $\mathcal{U}$-*Toeplitz*(o *forma de Toeplitz relativa a la familia* $\mathcal{U}$) si para todo $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}_\alpha x, \mathbf{U}_\alpha y) = \mathcal{F}(x, y), \quad \text{para todo } \alpha.$$

En esta charla consideraremos las formas de Toeplitz relativas a la familias de operadores $\{\mathbf{Rot}_\theta\}_{\theta \in [0, 2\pi)}$, llamadas *Formas de Toeplitz radiales*, y usaremos los resultados para caracterizar los operadores de Toeplitz generados por formas sesquilineales en el espacio de Bergman $A^2_\lambda(\Pi)$, concepto propuesto por Vasilevski y Rozenblum en [3] .

Palabras Claves

Forma de Toeplitz, Formas sesquilineales, Operadores de Toeplitz, Espacio de Bergman.

Referencias

1. P. Alegría, M. Cotlar (1998) “Generalized Toeplitz forms and interpolation colligations”. *Math Nachrichten*. 190 , 5–9.https://doi.org/10.1002/mana.19981900102
2. P. S. Muhly(1972) “Toeplitz operators and semigroups”. *J. Math. Anal. Appl.* 38, 312-319 . https://doi.org/10.1016/0022-247X(72)90089-3

3. G. Rozenblum, N. Vasilevski (2016) “Toeplitz operators defined by sesquilinear forms: Bergman space case”. *Journal of Mathematical Sciences*, **213**, No. 4, 582–609. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2726-0
4. K. Zhu (2007) *Operator Theory in Function Spaces*. In Serie: Mathematical surveys and monographs, vol. 138, 2nd Edition. American Mathematical Society, Rhode Island. ISBN-10:0-8218-3965-9

Capítulo 20
Introducción al método de los elementos finitos

Juan Galvis Arrieta

Resumen

En esta charla presentaremos una introducción a la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales parciales mencionando aplicaciones prácticas. En particular revisaremos algunos aspectos fundamentales del método de elementos finitos y si el tiempo lo permite presentaremos algunos resultados recientes relacionados con la construcción de aproximaciones multiescala y de métodos iterativos de descomposición de dominios.

Palabras Claves

Julia, Pluto, Pensamiento computacional.

Referencias

1. Galvis, Juan, and Henrique Versieux (2011) *Introdução a aproximação numérica de equações diferenciais parciais via o método de elementos finitos. IMPA,*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá-Colombia, e-mail: jcgalvisa@unal.edu.co

Capítulo 21
Introducción al pensamiento computacional con Julia

Juan Galvis Arrieta

Resumen

En este minicurso presentaremos una rápida introducción a Julia (https://julialang.org/) usando cuadernos de pluto. Presentaremos los tipos de datos básicos int y float con sus principales caracteristicas y limitaciones. Presentaremos una introducción corta al procesamiento de imágenes y a la libreria Plots.

Palabras Claves

Julia, Pluto, Pensamiento computacional.

Referencias

1. Alan Edelman, David P. Sanders and Charles E. Leiserson (1978) *Introduction to Computational Thinking: Make mathematics your playground!*.

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá-Colombia, e-mail: jcgalvisa@unal.edu.co

Capítulo 22
Operadores semi B-Fredholm generalizados bajo perturbaciones

Orlando García Mojica

Resumen

Un operador T definido sobre un espacio de Banach se llama semi B-Fredholm si para algún $n \in \mathbb{N}$ el rango $R(T^n)$ de T^n es cerrado y el operador inducido $T_n = T\mid_{R(T^n)}$ es semi Fredholm. Esta clase de operadores fue introducida y estudiada por primera vez por Berkani y Sarih en [1], como una generalización de los operadores semi Fredholm. En esta charla se hablará sobre una nuena clase de operadores lineales acotados que actúan sobre un espacio de Banach, y que generaliza a la de los operadores semi B-Fredholm, denominados operadores semi B-Fredholm generalizados, los cuales fueron introducidos y estudiados en [2]. Se presentarán las caracterizaciones más importantes de esta clase de operadores conocidas hasta ahora, y su comportamiento bajo perturbaciones por algunas clases de operadores.

Palabras Claves

Espacio de Banach, operadores semi B-Fredholm.

Referencias

1. M. Berkani and M. Sarih, *On semi B-Fredholm operators*, Glasgow Math. J. **43** (2001), 457-465.
2. O. Garcia, O. Ferrer, C. Carpintero and J. Sanabria, *On generalized semi B-Fredholm operators*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 **72** (2023), 1729-1737.

Corporación Universitaria del Caribe-CECAR, Sincelejo, Colombia, e-mail: orlando.garciam@cecar.edu.co

Capítulo 23
Determinación clásica de la energía del punto cero para diferentes sistemas radiantes

Hernando González Sierra

Resumen

En esta ponencia calculamos la energía electromagnética del punto cero (sin utilizar argumentos de cuantización) , no utilizamos la forma convencional del concepto de cuerpo negro y adoptando el punto de vista de asociar una longitud característica o longitud lineal para el oscilador de una cavidad; determinamos la energía del punto cero para diferentes sistemas radiantes reales encontrando que esta depende de un parámetro L que es aproximadamente el valor de la constante reducida de Planck.

Referencias

1. A.J Townsend (2010) *Quantum Physics: A Fundamental approach to Modern Physics*. University Science books, Mill Valley, California, EEUU.
2. S. Weinberg (1995) "The Quantum Theory of Fields". *Cambridge University Press.* Volume I Foundations, New York, EEUU.
3. T. W. Marshall (1965) "Stochastic electrodynamics". *Proc. Camb. Philos* Soc. 61, 537-546.
4. L de Broglie (1962) "New Perspectives in Physics". *Basic Books Publishing Co.* New York, EEUU.
5. T H Boyer (1975) "New Perspectives in Physics". *Phys. Rev. D. 11* p.790.
6. B Haisch, A Rueda (2000). Phys. Lett. A, 268; T.H Boyer" Stochastic Electrodynamics: The Closest Classical Approximation to Quantum Theory". *Atoms 2019, 7, 29.*; doi:10.3390/atoms7010029.
7. D.J Griffiths (2013) "Introduction to Electrodynamics". *Pearson Education* Fourth Edition.
8. K. L Novak and L.J Fox (2018) "Special Functions of Mathematical Physics". *Copyrighted Material*. New York, EEUU.
9. S. Hassani (1999). Mathematical Physics " A Modern Introduction to Its Foundations". *Springer International Publishing*. Second Edition. New York, EEUU.

Universidad Surcolombiana, Neiva-Colombia, e-mail: hergosi@usco.edu.co

10. G. B Arfken, H.J Weber and F. E Harris (1999). Mathematical Physics " Mathematical Methods for Physicists". *Academic Press Publications*. Seventh Edition. New York, EEUU.

Capítulo 24
Digráficas altamente simétricas

Bernardo Llano

Resumen

Una *gráfica orientada* se puede definir como un conjunto finito de puntos (llamados vértices) en el plano y un conjunto de flechas orientadas entre algunos pares de los vértices con las siguientes condiciones: no se admiten flechas múltiples ni flechas de ida y regreso (esto es, entre dos vértices fijos, si existe una flecha, es única). Dos gráficas orientadas D y D' son *isomorfas* (equivaelntemente, tienen la "misma forma" o *representan un mismo objeto*) si existe una función biyectiva entre sus conjuntos de vértices que preservan la adyacencia determinada por las flechas.

En esta plática, daremos un panorama del problema de determinar cuándo dos gráficas orientadas circulantes son isomorfas conocido como el problema de Ádám para digráficas circulantes (véase [1]). Esto significa: cómo descubrir si dos dibujos aparentemente distintos determinan una misma gráfica orientada circulante. En particular, enfocamos la atención a determinar las clases de isomorfismo para ciertos circulantes especiales llamados *torneos* con pocos vértices y a plantear un par de problemas abiertos. La plática se conducirá a través de muchos dibujos de digráficas circulantes para ilustrar las ideas básicas.

Palabras Claves

Torneos circulantes, isomorfismo de digráficas.

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa-México, e-mail: llano@xanum.uam.mx

Referencias

1. A. Ádám. (1967) "Research problem 2–10". *Journal of Combinatorial Theory* 2, p. 393.

Capítulo 25
El infinito

Boris José Lora Castro

Resumen

Esta charla divulgativa expone el concepto del infinito desde su uso cotidiano pasando por consideraciones de orden filosófico y religioso hasta la teoría cantoriana del infinito. Se exponen también algunas consideraciones asociadas con la hipótesis del continuo.

Palabras Claves

infinito, ápeiron, infinitesimales, conjunto enumerable, hipótesis del continuo.

Referencias

1. NATANSON I (1974) *Teoría de las funciones de variable real (en ruso)*. Nauka, Moscú, URSS.
2. ZELLINI, P. (1991) *Breve historia del infinito.*.Ediciones Siruela, Madrid, Spain.
3. SARTORIO, A. (2000) *Conjuntos e infinitos.*. Eudeba, Buenos Aires, Argentina.
4. GÖDEL K. (1940) *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis With the Axioms of Set Theory.*. Princeton university press, Princeton, England.
5. COHEN P. (1974) *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Benjamin inc.,NY.
6. LESTÓN, P. Y VEIGA, D. (2004) "Introducción al infinito". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* V. 17(1), 440-410.

Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: borislora@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 26
Modelamiento de Códigos de Hamming

Newton Mercado, Alexander López, Jorge Robinson

Resumen

Los Códigos binarios de Reed-Muller, a pesar de tener una distancia mínima pequeña, son de importancia práctica por su facilidad de implementación y codificación. En este trabajo estudiaremos y modelaremos computacionalmente la conexión entre los códigos de Reed-Muller y la gemetría proyectiva. Utiizaremos la definición recursiva para la construcción de estos códigos. Utilizaremos algoritmos para construir códigos de Reed-Muller de orden r y sus respectivos duales. Luego utilizaremos una generalización que nos permita construir códigos de Reed-Muller para campos finitos de orden mayor que 2.

Palabras Claves

Códigos de Reed-Muller. Código dual.

Referencias

1. W. Cary Huffman, Vera Pless. *Fundamentals of Error Correcting Codes*. Cambridge University Press.
2. San Ling, Chaoping Xing. *Coding Theory.* Cambridge University Press.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: nsebastianmercado@mail.uniatlantico.edu.co, alexanderlopezs@mail.uniatlantico.edu.co, jogerobinson@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 27
Matemáticas mediadas por el desarrollo del pensamiento computacional orientadas a docentes en formación inicial

Sarais Mercado Calle, Sonia Valbuena Duarte

Resumen

Uno de los desafíos del sistema educativo se relaciona con el continuo avance de la tecnología; siendo así, se identifica una necesidad que presupone transformaciones metodológicas en los procesos usados por los docentes, en los currículos de las instituciones educativas. Teniendo en cuenta esto, la presente investigación tuvo por objetivo desarrollar un programa para el desarrollo de pensamiento computacional en docentes de matemáticas en formación inicial brindando estrategias didácticas mediadoras del pensamiento computacional en las aulas de matemáticas, pues además de ser una herramienta de gran utilidad para los procesos de aprendizaje, es un componente que desarrolla en los estudiantes creatividad, pensamiento lógico, trabajo en equipo, pensamiento algorítmico, reconocimiento de patrones, abstracción, entre otras habilidades.

Palabras Claves

Pensamiento computacional, docentes en formación inicial.

Referencias

1. Valbuena Duarte S., Berrio Valbuena J., Coronado K. (2021). *El rol del docente de matemáticas en el desarrollo del pensamiento crítico en la enseñanza remota*. Boletin Redipe. 10(1). https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7925594

Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

2. Wing, J. (2022). *Computational Thinking. View Point*. Comunication of ACM, 49(3), 33–35 . http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/wing/www/publications/Wing06.pdf

Capítulo 28

Metodología estadística para la identificación de los determinantes sociales en las condiciones laborales de la mujer en época Poscovid de los municipios de Armenia y Génova, departamento del Quindío, Colombia

Mónica Mesa Mazo, Leidy Cardona Hernández, César Acosta Minoli

Resumen

The purpose of this document is to introduce a statistical approach to identifying the social factors that impact women's working conditions in the post-COVID period in the municipalities of Armenia and Génova, located in the Quindío department of Colombia.

When looking at gender issues from a human rights perspective, it's important to consider the construction of equal relationships and how contemporary phenomena like family transitions have influenced social transformations. Throughout history, women have been subject to homogenizing power devices, which have imposed stereotypes in the sexual division of labor, resulting in rigid social practices. This has created a significant social determinant that establishes a clear division between the productive world and the domestic space. The methodology used in this study includes a cartographic inventory and an aggregate file of dwellings and households, using information obtained from the National Geostatistical Framework (MGN) of the National Administrative Department of Statistics (DANE) [2],[3].

Finally, the results show that the methodology is sufficiently robust to be extrapolated to similar studies.

Palabras Claves

Statistical methodology, Gender Equality, working conditions of women.

Universidad del Quindío, Armenia-Colombia, e-mail: cminoli@uniquindio.edu.co, jmgarcia@uniquindio.edu.co, mjmesa@uniquindio.edu.co

Referencias

1. Girón, A. (2021). Economía de la vida: feminismo, reproducción social y financiarización.
2. DANE (2022). Encuesta Nacional del uso del tiempo. Boletín técnico. https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/pobreza-y-condiciones-de-vida/encuesta-nacional-del-uso-del-tiempo-enut
3. DANE (2023). Mercado laboral según sexo. Boletín técnico. https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/mercado-laboral/segun-sexo

Capítulo 29

Metodología estadística para la identificación de los determinantes sociales en las condiciones laborales de la mujer en época Poscovid de los municipios de Armenia y Génova, departamento del Quindío, Colombia

Mónica Mesa Mazo, Jorge García Usuga, Andrea Gómez Escudero

Resumen

El cuidado del agua es una de las prioridades a nivel mundial. Todos los paáises hacen enormes esfuerzos y gastan grandes cantidades de recursos en la conservación y monitoreo de las fuentes hídricas; el motivo de estos cuidados se debe a que la calidad del agua está estrechamente relacionada con la calidad de vida de las personas que habitan una determinada zona.

Colombia es un país que gracias a su topografía, posee una gran cantidad de ríos; es por eso que entidades como el Instituto Colombiano Agropecuario, Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible (MADS) de la República de Colombia y el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales (IDEAM), tienen el objetivo de proteger y vigilar las fuentes hídricas dada su importancia para la sociedad, además que gran parte del territorio colombiano suple sus necesidades de agua tomándola directamente de los ríos.

Para este propósito se utilizan herramientas tecnológicas que permiten ver cómo afectan las cuencas hídricas y en especial, cómo se alteran sus parámetros físico químicos con la aparición de sustancias contaminantes, bien sea de origen artificial como agentes químicos externos (mercurio, cloro, cromo, etc) o debido a los vertimientos de alcantarillados de las diferentes ciudades (Coliformes fecales y totales).

Los parámetros físico químicos del agua, se utilizan para cumplir con regulaciones y normas de calidad del agua establecidas por entidades como el MADS. A través de estas regulaciones se promueve asegurar que el agua potable sea segura para el consumo humano. El estudio de estos parámetros permite describir concretamente qué factores externos están afectando el agua y sobre todo, posibilita encontrar y evaluar su origen, clasificado las zonas donde puede haber mayor la afectación. Teniendo en cuenta que la descontaminación de las aguas residuales es un proceso

Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt-Universidad del Quindío, Armenia-Colombia, e-mail: mmesa4@cue.edu.co, jmgarcia@uniquindio.edu.co, agomez@uniquindio.edu.co

de alto costo, se hace necesario la correcta clasificación y evaluación de las zonas para una correcta optimización de los recursos.

Es por esto que una herramienta para la simulación de los parámetros físicos químicos de los ríos, permitiría tener una mejor comprensión del estado de contaminación de este y sobre todo, gestionar recursos para vertimientos de sustancias nocivas, efectos de la minería ilegal, contaminación por atentados terroristas, o desastres naturales.

Por tales razones, en este trabajo se pretende clasificar las zonas de las cinco cuencas hidrogróficas del departamento del Quindío: Río Roble, Quebrada Buena vista, Río Lejos, Río Rojo y Río Quindío del departamento del Quindío, a través de una aproximación del índice de calidad del agua (ICA) y los valores límites establecidos en la normativa colombiana.

Para realizar esta clasificación se desarrolló un software que integré la red hidrográfica a través de un grafo que reúne cerca del 90 % de los ríos del departamento del Quindío; usando la librería NetworkX en Python 3.9 y los modelos en ecuaciones diferenciales parciales [3, 4, 6] que describen la dinámica de los parámetros de calidad del agua como la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO), el Oxígeno Disuelto (OD), Coliformes Totales (CT), los Sólidos Suspendidos Totales (SST) y los Sólidos Suspendidos Disueltos (SSD) en toda la red hídrica de las cuencas del departamento del Quindío. La simulación de estos parámetros se realizó con la ecuación [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = R(u) \tag{29.1}$$

Donde:

- (u) Es la concentración de una sustancia química.
- (t) es el tiempo.
- $(x\ )$ es la posición en la dirección de advección.
- $(c\ )$ es la velocidad de advección.
- $(R(u)\ )$ es la función de reacción.

Además, se realizaron varias simulaciones con diferentes escenarios, perturbando las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales que modelan los diferentes parámetros de calidad del agua. Con base en las simulaciones se aproximó el índice de calidad del agua utilizando los parámetros físico químicos del agua SST, SDT, Coliformes, DBO y OD. Para señalar esto en la red, se utiliza una tabla de valores que indican la calidad del agua de acuerdo al valor ICA como se ve en el Cuadro 29.1.

La Figura 29.1 es una representación de una parte de una red hidrográfica, donde los nodos son zonas puntuales del río como intersecciones o nacimientos y las aristas representan el cause del río en la dirección de la arista [6]. El Cuadro 29.1 muestra en su tercera columna los colores del valor ICA (Indice de Calidad del Agua) [5], donde el agua de mejor calidad se le asigna el color azul y a la de peor calidad el color rojo. Estos valores se asignan a la red que se muestra en la figura 29.1, donde cada nodo se colorea de acuerdo con su índice ICA para indicar la calidad del agua

Categorías	Calificación de la calidad del agua	Señal de alerta
0,00 - 0,25	Muy mala	Rojo
0,26 - 0,50	Mala	Naranja
0,51 - 0,70	Regular	Amarillo
0,71 - 0,90	Aceptable	Verde
0,91 - 1,00	Buena	Azul

Cuadro 29.1 Categorías del ICA

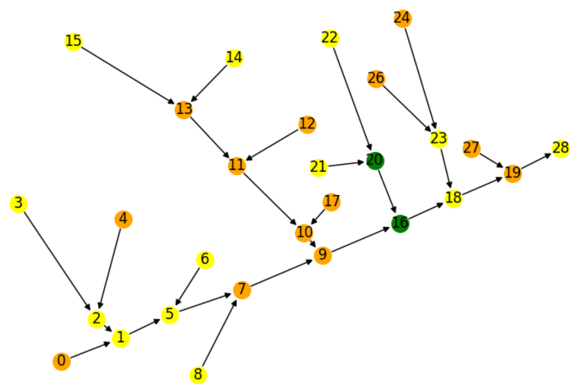

Figura 29.1 Red con coloreado del ICA del Cuadro 29.1.

en ese punto específico. En la Figura 29.1 se ve que los nodos 20 y 16 tienen un mejor ICA que los nodos 27 y 19.

Palabras Claves

Redes complejas, ICA, parámetros de calidad del agua, ríos, simulación.

Referencias

1. Estrada, E. (2012). The structure of complex networks: theory and applications. Oxford University Press.
2. García, J. M García Usuga, J. (2022). Simulación de la evolución de los parámetros físico - químicos del agua en las cuencas del departamento del Quindío, basada en redes complejas y ecuaciones en derivadas parciales. Universidad Nacional de Colombia.
3. García, J. M, Mesa, M. J., & Olivar, G García, J. M., Mesa, M. J., and Olivar, G. (2020). Application of the theory of networks to model a drainage network of a watershed: case study department of Quindío Colombia. Hidrobiológica, 30(2):129-142.

4. García-Usuga, J. M., Olivar-Tost, G., Mesa-Mazo, M. J., and Acosta-Minoli, C. A. García-Usuga, J. M., Olivar-Tost, G., Mesa-Mazo, M. J., and Acosta-Minoli, C. A. (2021). Modeling the dynamics of total suspended solids in a mountain basin using network theory. River Research and Applications, 37(7):955?966.
5. Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales - IDEAM. Hoja metodológica del indicador índice de calidad del agua (Versión 1,00). Sistema de Indicadores Ambientales de Colombia - Indicadores de Calidad del agua superficial. 10 p. Disponible en: http://www.ideam.gov.co/documents/24155/125494/36-3.21_HM_Indice_calidad_agua_3_FI.pdf/9d28de9c-8b53-470e-82ab-daca2d0b0031#:~:text=El%20%C3%8Dndice%20de%20calidad%20del,j%20en%20el%20tiempo%20t.
6. X. W. Wu, L. Li, and Y. G. Qu X. W. Wu, L. Li, and Y. G. Qu, ?Modelling and analysis of river networks based on complex networks theory,? Trans Tech Publications Ltd, vol. 756, pp. 2728?2733, 10 2013.

Capítulo 30
Teoría de Nudos y Homología de Khovanov

Gabriel Montoya-Vega

Resumen

La fascinante teoría matemática de nudos estudia la forma en que las curvas cerradas simples viven en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Históricamente originada como una sub-área de la topología, esta teoría se ha desarrollado al punto de ser uno de los campos mas populares de investigación matemática actualmente.

En esta charla exploramos los inicios históricos de la teoría y luego estudiamos la noción de invariantes de nudos. La parte principal de la charla consiste en la construcción, a partir del polinomio bracket, de la homología de Khovanov. Esta teoría de homología fue introducida hace 23 años y constituye una de las invariantes mas fuertes.

Palabras Claves

Nudos, invariantes, polinomio bracket, homología de Khovanov.

Referencias

1. Montoya-Vega, G. (2023) "Una Mirada Inicial a la Teoría de Nudos y a la Homología de Khovanov". arXiv:2308.10277.pdf [math.HO]. Partial English translation: arXiv:2308.08452.pdf [math.GT].

City University of New York-GC — University of Puerto Rico-RP, e-mail: gabrielmontoyavega@gmail.com

2. Przytycki, J. H., Bakshi, R. P., Ibarra, D., Montoya-Vega, G., Weeks, D. (2023) "Lectures in Knot Theory: An Exploration of Contemporary Topics". *Springer Universitext, to be published November 2023*. Springer.com/book/9783031400452.
3. Viro, O. (2004) "Khovanov homology, its definitions and ramifications". *Fund. Math.*, 317-342, 2004. arXiv:0202199 [math.GT].

Capítulo 31
Representación de la ecuación de Stokes en diferencias finitas: forma estacionaria y forma evolutiva

Willy Mora Botero, Paulo Carmona Tabares

Resumen

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales usadas para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con el comportamiento real de la dinámica de fluidos. Estas ecuaciones deben su nombre a los científicos del siglo XIX Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes, las cuales se obtienen aplicando el equilibrio de momento a los principios de conservación de masa (teorema de la divergencia) y la termodinámica (teorema de transporte) [5].
Las ecuaciones de Navier-Stokes presentan dos características, la primera es que son un sistema de ecuaciones no lineales y la segunda que son un sistema acoplado de velocidades y presión; debido a estas características, este conjunto de ecuaciones carece de una solución analítica (exacta); en consecuencia, para obtener una solución aproximada, es preciso recurrir a métodos numéricos y simplificaciones de las ecuaciones [2].
En este trabajo se pretende mostrar las soluciones numéricas de dos variantes de las ecuaciones de Navier-Stokes: la ecuación estacionaria de Stokes y la ecuación evolutiva de Stokes. Para su resolución se usarán dos enfoques fundamentales, el método de diferencias finitas y el esquema MAC (*Marker and Cell*); además de estos, en el caso de la solución numérica de la ecuación estacionaria de Stokes, se aplicará el método distributivo de Gauss–Seidel con relajación, mientras que para resolver numéricamente la ecuación evolutiva de Stokes se empleará el método de proyección.

Universidad del Quindío, Armenia, Colombia, e-mail: wmora@uniquindio.edu.co, paulocct@uniquindio.edu.co

Palabras Claves

Ecuaciones de Navier-Stokes, ecuación estacionaria de Stokes, ecuación evolutiva de Stokes, método de diferencias finitas.

Referencias

1. Brandt, A. & Dinar, N. (1979) *Multigrid Solutions to Elliptic Flow Problems.* ISBN 0-12548050-3.
2. Chen, L. (2016) *Finite Difference Method for Stokes Equations: MAC Scheme*. *Math. Notes*.
3. Chorin, A. J. (1968) *Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations*. Courant Institute of Mathematical Sciences.
4. Harlow, A. & Welch, J. (1965) *Numerical Calculation of Time-Dependent Incompressible flow of fluid a free surface*. The Physics of Fluids 8, 2182-2189.
5. Young, D. F. & Munson, B. R. (2011) *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley and Sons., West Virginia, USA.

Capítulo 32
Resolución de ecuaciones diferenciales mediante estructuras resolubles y $\mathcal{C}^\infty$-estructuras

C. Muriel, A. J. Pan-Collantes, A. Ruiz

Resumen

En esta ponencia se presentan diversas técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales basadas en la existencia de estructuras resolubles [2, 7, 1] y $\mathcal{C}^\infty$-estructuras [4]. Ambos conceptos se establecen un marco mas general que el de las ecuaciones diferenciales, ya que proporcionan un procedimiento sistemático de integración para distribuciones involutivas de campos vectoriales [8].

Una vez que se ha determinado una estructura resoluble para una distribución involutiva $\mathcal{Z}$, sus elementos pueden utilizarse para construir una secuencia de 1-formas diferenciales. Dichas 1-formas permiten definir una sucesión de ecuaciones de Pfaff completamente integrales, cada una de ellas definida en un espacio de dimensión una unidad menor. Dichas ecuaciones de Pfaff pueden ser resultas (locamente) por cuadratura. La resolución sucesiva de dichas ecuaciones conduce, en la última etapa, a la integración completa de la distribución inicial $\mathcal{Z}$.

Cuando a los elementos de una estructura resoluble no se le impone que sean simetrías, sino $\mathcal{C}^\infty$-simetrías [3], obtenemos una estructura más amplia, que ha sido denominada $\mathcal{C}^\infty$-estructura, recientemente introducida en [4]. Una vez conocida una $\mathcal{C}^\infty$-estructura, la integración de la distribución también se consigue resolviendo en cada etapa una ecuación de Pfaff complemente integrable, si bien las 1-formas que las definen, a diferencia de lo que sucede con una estructura resoluble, no tienen por qué ser cerradas. En este escenario, los llamados factores simetrizantes y su relación con los factores integrantes relativos, reciente investigados en [5], son de gran utilidad para facilitar la búsqueda de primitivas en cada etapa.

Se presentan asimismo ejemplos ilustrativos de cómo ambos objetos (estructuras resolubles y $\mathcal{C}^\infty$-estructuras) pueden ser encontrados y utilizados para encontrar soluciones exactas de diferentes problemas modelados por ecuaciones diferenciales [6].

Universidad de Cádiz, Cádiz, España, e-mail: concepcion.muriel@uca.es

Palabras Claves

Ecuación diferencial, estructura resoluble, simetría, C^∞-simetría, C^∞-estructura.

Referencias

1. Barco, M.A., Prince, G.E. (2001) "Solvable symmetry structures in differential form applications". *Acta Applicandae Mathematica* V. 66, 89–121.
2. Basarab-Horwath, B. (1991) "Integrability by quadratures for systems of involutive vector fields". *Ukrainian Math. Zh.* V. 43, 1330–1337.
3. Muriel, C., Romero, J.L. (2001) "New methods of reduction for ordinary differential equations". *IMA J. Appl. Math.* V. 66(2), 111–125.
4. Pan-Collantes, A. J., Ruiz, A., Muriel, C., Romero, J. L. (2023) "C^∞-symmetries of distributions and integrability". *J. Diff. Eq.* V. 348, 126–153.
5. Pan-Collantes, A. J., Ruiz, A., Muriel, C., Romero, J. L. (2023) "C^∞-structures in the integation of involutive distributions". *Phys. Scr.* V. 98, 085222.
6. Pan-Collantes, A. J., Muriel, C., Ruiz, A. (2023) " Integration of differential equations by C^∞-structures". *Mathematics*. V. 11(18), 3897.
7. Sherring, J., Prince, G. (1992) "Geometric aspects of reduction of order". *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 334(1), 433–453.
8. Warner, F. W. (1983) *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, New York, EEUU.

Capítulo 33
Estudio de un Modelo de Rectas Separadoras para el empaquetamiento de ítems irregulares convexos

Jonathan Ochoa, Alfredo Roa, Jeinny Peralta

Resumen

En este trabajo, se estudia un modelo de rectas separadoras para la solución de un problema de empaquetamiento de ítems irregulares convexos. El objetivo central es optimizar la colocación de n polígonos irregulares dentro de un contenedor rectangular con ancho fijo y longitud ilimitada, mediante la minimización de la longitud del contenedor y cumpliendo simultáneamente con las restricciones de no sobreposición y contenencia adecuada de los polígonos. Para asegurar que no haya sobreposición, en este trabajo se implementa en MATLAB un modelo de programación no lineal basado en rectas separadoras, lo que permite la rotación libre de los polígonos, facilitando así una colocación óptima dentro del contenedor.

Palabras Claves

Recta separadora, items irregulares convexos, fmincon, empaquetamiento de items irregulares, restricciones de no superposicioón, restricciones de contenencia, optimizacioón.

Referencias

1. Bennell, Julia A. ; Oliveira, Jose F.:The geometry of nesting problems: A tutorial. In: European journal of operational research 184 (2008), Nr. 2, S. 397- 415.
2. Fujita, Kikuo: Approach for optimal nesting using genetic algorithm and local minimization algorithm. In: Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C 59 (1993), Nr. 564, S. 2576.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: jdop.0296@gmail.com, alfredoroa8@gmail.com, jeinnyp@gmail.com

3. Luenberger, David G.: Linear and nonlinear programming. 2. AW, 1984.
4. Mundim, Leandro R. ; Andretta, Marina ; Queiroz, Thiago A. de: A biased random key genetic algorithm for open dimension nesting problems using no-fit raster. In: Expert Systems with Applications 81 (2017), S. 358-371.
5. Peralta, Jeinny ; Andretta, Marina ; Oliveira, José F.: Solving irregular strip packing problems with free rotations using separation lines. In: Pesquisa Operacional 38 (2018), S. 195-214

Capítulo 34
Perspectivas de los Estudiantes de Cálculo acerca del Uso de Problemas Verbales

Kevin Palencia

Resumen

Las clases de cálculo juegan un papel importante en la retención de los estudiantes en los programas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM). Muchos investigadores recomiendan el uso de modelos de enseñanza efectivos que promuevan prácticas equitativas para la retención de los estudiantes, especialmente de aquellos que han sido tradicionalmente marginados por el sistema educativo. En este estudio analizamos encuestas y entrevistas con el objetivo de investigar las perspectivas de estudiantes acerca del uso de problemas verbales en las clases de cálculo. Los participantes son estudiantes de cálculo en una universidad de Estados Unidos. Presentaremos algunos resultados preliminares al hacer análisis de correlaciones considerando grupos étnicos específicos. Finalmente, discutiremos las implicaciones de usar problemas verbales para el aprendizaje del cálculo.

Palabras Claves

Educación equitativa; Enseñanza del cálculo; Perspectivas de los estudiantes.

Referencias

1. C. Rasmussen and J. Ellis *Who is switching out of calculus and why*, Proceedings of the 37th Conference of International Group of the Psychology of Mathematics Education **4** (2013), 73-80.

Northern Illinois University, Estados Unidos, e-mail: palencia@niu.edu

2. C. Riegle-Crumb, B. King and Y. Irizarry *Does STEM stand out? Examining racial/ethnic gaps in persistence across postsecondary fields*, Educational Researcher **48** (2019), no. **3**, 133-144.

Capítulo 35
Una Familia Interesante de Polinomios Reales

Kevin Palencia

Resumen

Muchos problemas en el campo de análisis complejo naturalmente se reducen al estudio de propiedades de familias de polinomios reales. Específicamente, en esta conferencia presentaremos como la conjetura de la estimación del grado de una función racional propia entre bolas en el espacio complejo Euclidiano y la construcción de funciones CR que son invariantes de grupo nos conducen al estudio de la familia de polinomios, $\mathcal{P}(n)$, que consiste de polinomios en en anillo $R = [x_1, x_2 ..., x_n]$ con coeficientes no negativos y que toman el valor de 1 cuando $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Palabras Claves

Funciones CR; Funciones propias; Polinomios reales.

Referencias

1. J. D'Angelo and J. Lebl *Complexity results for CR mappings between spheres*, International Journal of Mathematics **20** (2009), no. **2**, 149-166.
2. J. Lebl and H. Peters *Polynomials constant on a hyperplane and CR maps of spheres*, Illinois J. Math. **56** (2012), no. **1**, 285-315.

Northern Illinois University, Estados Unidos, e-mail: palencia@niu.edu

Capítulo 36
Condiciones de Frontera para un Problema de Contacto

Ramiro Peñas Galezo

Resumen

En esta presentación se divulgan las condiciones de frontera para un problema de contacto adhesivo entre solidos deformables. También se abordan los elementos que enmarcan la existencia de soluciones del problema mediante la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con operadores multivaluados no acotados.

Palabras Claves

Contacto adhesivo, operadores monotonos.

Referencias

1. M. FREMOND. Contact with Adhesion in: Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana (eds) *Phase Change in Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag (2012) 109-113.
2. P. COLLI, A. VISINTIN. On a class of doubly nonlinear evolution equations. *Commun Partial. Differ Equ* 15(1990) 737–756.
3. P. COLLI. On some doubly nonlinear evolution equations in Banach spaces. *Jpn J Ind Appl Math* 9(1992) 181–203.
4. T. ROUBÍCĚEK. Doubly-nonlinear Problems in: *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Basel: Birkhäuser Verlag (2005) pp. 321-356.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: ramiropenas@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 37
Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje de Cuerpos Geométricos en el Aula a través del uso de Geogebra

José Leonardo Perea Lara

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en los últimos tiempos presenta grandes cambios y grandes desafíos a nosotros los docentes. La investigación tiene como objetivo examinar la evidencia existente y proponer algunas pautas para futuras investigaciones en la utilización del software GeoGebra en la asignatura de geometría y en el área de matemáticas. Desde el punto de vista metodológico, este estudio se basa en una revisión sistemática de la literatura, por ello se utilizaron como fuentes de información las bases de datos: Dialnet, Redalyc, ScienceDirect, Scielo, Google Scholar y Scopus. Respecto a los criterios de selección y de calidad se determinó: incluir todas las publicaciones entre los años 2013 al 2022 y cuya procedencia se derive artículos de revistas indexadas, tesis de postgrado, libros, publicaciones de congresos Internacionales; además, el contenido debía referirse acerca de la utilización del software GeoGebra en la asignatura de geometría y guardar una relación directa con las preguntas planteadas en la investigación del trabajo. De acuerdo a los aspectos permitieron seleccionar treinta artículos que fueron examinados de manera cualitativa. Como resultado principal de esta investigación se obtuvo que la utilización del software GeoGebra en la asignatura de geometría puede incidir significativamente en el aprendizaje, la enseñanza y mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes siempre que los conceptos, temas, ejercicios utilizados estén diseñados bajo parámetros cognitivos adecuados al grado de escolaridad, por tanto se consolide los elementos necesario de la geometría y el docente sea un facilitador que acompañe dicho proceso.

Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología, Ciudad de Panamá, Panamá, e-mail: jleonardop79@gmail.com

Palabras Claves

Geometría, Figuras planas, cuerpos geométricos, GeoGebra, rendimiento académico.

Referencias

1. Abar, C. A., & Alves Araújo, J. R. (2019) *Contributions of GeoGebra in the dialectics of a didactic situation for the study of Central Tendency Measures.*. Educação Matemática Debate, 3(9), 282-302. Retrieved on 01/22/2022, https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=600162936005
2. Aguilar Hito, A. E. (2015) *Methodology with GeoGebra software to develop the ability to communicate and represent mathematical ideas with linear functions.*. Peru: University of Piura. Faculty of Science.
3. Anangonó Caizaluisa, J. A. (2018) *Interactive tools in the learning of geometric bodies and plane figures in the area of mathematics, of students of eighth year of basic general education*. Design of an interactive software. Quito: University of Guayaquil, Faculty of Philosophy, Letters and Education Sciences. Retrieved on 202/24, 2022, http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/33844
4. Antezana Iparraguirre, R. P., Cayllahua Yarasca, U., Yalli Huamán, E., & Rojas Quispe, A. E. (2020) *Van Hiele model and Geogebra software in student learning in areas and perimeters of regions*. Horizon of Science, vol. 10, no. 18, 4-18. doi:https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2020.18.406
5. Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. F., & Del Sol Martínez, J. L. (2019) *The GeoGebra: a technological tool to learn mathematics in Basic Secondary by doing mathematics*. Conrad Magazine, 15(70), 102-108. Retrieved on 05/05/2022, from http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado
6. Bach Chune Ignacio, A. R. (2019) *Geometric solids of our environment.* Trujillo - Peru: Library of Education and Communication Sciences - UNT. Retrieved on 01/24, 2022, from https://dspace.unitru.edu.pe/bitstream/handle/UNITRU/12894/CHUALEX
7. Báez, R., & Iglesias, M. (2007) *Didactic principles to follow in the process of teaching and learning geometry at UPEL "El Mácaro".* Mathematics Teaching, 12-16, 67-86.
8. Biolchini, J., Gomes, P., Cruz, A., & Horta, G. (2005) *Systematic Review in Software Engineering.* Recuperado el 20 de 04 de 2022, de Systematic Review in Software Engineering: https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/es67905.pdf.
9. Booth, A., Sutton, A., Clowes, M., & Martyn-St James, M. (2016) *Systematic approaches to a successful literature review (first ed.).* London, UK: Sage publications Ltd.
10. Calvo Chujutalli, I. (2021) *Development of the geometric competence mediated by the Geogebra software in the fourth grade of secondary school, Uchiza, 2019.* Huánuco - Peru: Universidad Nacional "HERMILIO VALDIZÁN".
11. Cedeño Menéndez, R. R., & Valdez Trejo, V. (2022) *The use of Geogebra as a tool to improve academic performance in high school students.* Pole of Knowledge (Issue No. 67) Vol. 7, No 2, 2412-2435.
12. Spanish Cochrane Centre. (2011) *Cochrane Handbook of Systematic Reviews of Interventions, version 5.1.0.* Retrieved 22/04/2022, from Cochrane Handbook of Systematic Reviews of Interventions, version 5.1.0.: https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/es67905.pdf
13. Chuñe Ignacio, A. R. (2019)*Geometric solids of our environment. Trujillo Peru: Creative Commons.*Retrieved on 2022/25, 2022, https://dspace.unitru.edu.pe/bitstream/handle/UNITRU/12894/CHUALEX

14. Cuentas Berdugo, E. J., Miranda Ruiz, F. d., & Chilito Waltero, G. (2017) *Didactic sequence "geometric solids"mediated by Geogebra software to stimulate geometric thinking in 9th grade students.* Barranquilla: Universidad del Norte.
15. Del-Pino, J. (2013) *The use of Geogebra as a tool for learning dispersion measures.* Proceedings of the Virtual Conference on Didactics of Statistics, Probability and Combinatorics (pages 243-250). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
16. Faria, R. W., Maltempi, M. V. (2019) *Intradisciplinarity Mathematics with GeoGebra in School Mathematics.* Bolema: Bulletin of Mathematics Education Vol. 33, 348-367.
17. Foster, M. J., & Jewell, S. T. (2017) *Assembling the pieces of a systematic review: a guide for librarians.* Rowman & Littlefield Publishing.
18. Gamboa Araya, R. y. (2010) *The teaching and learning of geometry in high school, the perspective of students.* Electronic Journal Educare, XIV (2), 125-142. Retrieved on 03/12, 2022, from https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194115606010
19. García Peña, S., & López Escudero, O. L. (2008) *The teaching of Geometry. Mexico: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.*
20. García, M. J., Eguia, I., Etxeberria, P., & Alberdi, E. (2020) *Implementation and evaluation of interdisciplinary activities through dynamic applets for the study of geometry.* University Education, 13(1), 63-70. Retrieved on 04, 2022, from . https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000100063
21. García, Y., Marbán, M., & Arnal, M. (2020) *Students' perception of GeoGebra software in the study of statistics in Education degrees.* XXVIII Jornadas ASEPUMA - XVI, Annual International Meeting of ASEPUMA n28: A105. Obtained from XXVIII Conference ASEPUMA - XVI.
22. Gómez Rubio, V., & Haro Delicado, M. J. (2014) *Geogebra as a resource for new mathematics.* Baeza:Unia20.
23. Hernández Hechavarría, C. M., Arteaga Valdés, E., & Del Sol Martínez, J. L. (2021) *Use of digital teaching materials with GeoGebra in the Teaching of Mathematics.* Conrado Magazine, 17(79), 7-14.
24. Hernández, C. M., & Revilla, A. (2017) *Use of GeoGebra in the first year of university careers: Examples and didactic considerations.* Educational Technology, 2(1), 39-48.
25. Hernández, V., & Villalba, M. (2001) *Perspectives in the Teaching of Geometry for the XXI Century.* Discussion paper for ICMI study. PMME-UNISON. Retrieved from http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm
26. Kitchenham, B. (2004) *Procedures for Performing Systematic Reviews.* Joint technical report (Vol. 33). Empirical Software Engineering National ICT Australia Ltd (Australia): Department of computer sciences, Keele University (UK). , 1-33.
27. Kitchenham, B., & Charters, S. (2007) *Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering Vol 2.* Technical report, EBSE Technical Report EBSE-2007-01, 1-87. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/302924724
28. Kitchenham, B., Brereton, O., Budgen, D., Turner, M. B., & Linkman, S. (2009) *Systematic reviews of the literature in software engineering: a systematic review of the literature.* Information Technology and Software, 51(1), 7-15. doi:https://doi.org/10.1016/j.infsof.2008.09.009
29. Maia, J., & Gomes Pereira, M. (2015) *The GeoGebra Software: An Applied Learning Strategy in the Study of Trigonometric Functions.* Science and Nature, vol. 37, no. 3, 401-410. Retrieved the 19 of 01 of 2022, of https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547643033
30. Muniz Teixeira, A. S., & Mussato, S. (2020) *CONTRIBUTIONS OF THE GEOGEBRA SOFTWARE IN THE CLASSES WITH SOLIDS.* REAMEC Magazine, Cuiabá (MT), v. 8, n. 3, 449-466.
31. Palella, S., & Martins, F. (2012) *Methodology of quantitative research.* Caracas:: Fedupel.
32. Palmarini, R., Erkoyuncu, J. A., Roy, R., & Torabmostaedi, H. (2018) 'it A systematic review of augmented reality applications in maintenance. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Volume 49, 215-228. doi:https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.06.002.
33. Patiño Delgado, J. W. (2021) *Pedagogical strategy mediated by Geogebra for the learning of geometric thinking.* Barranquilla: Universidad del Costa CUC.

34. Petticrew, M., & Roberts, H. (2006) *Systematic Reviews in the Social Sciences.* John Wiley & Sons, Ltd.
35. Quispe, V. C. (2020) *Use of GeoGebra in the learning of geometric bodies in students of the Third Grade of Secondary Education.* Huancavelica Peru: Universidad Nacional de Huancavelica.
36. Reina Cruz, M. G. (2018) *The use of the Geogebra tool in the interpretation and construction of geometric solids.* Bogotá: Universitaria Gustiniana.
37. Rodriguez Pereira, L., Guimarães Gomes, M., Gomes Pinheiro, N., da Silva, J. M., Faragó Jarmin, D., Faissal Brito, A. (2017) *Using GeoGebra for teaching solids of revolution.* Science and Nature, vol. 39, no. 3, 666-686.
38. Ruiz Bolívar, C. (2002) *Educational research instruments.* Venezuela: Fedupel.
39. Sánchez Restrepo, J. D. (2021) *The teaching and learning of geometric bodies with the GeoGebra tool.* Medellín: Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD. https://www.twinkl.es/teaching-wiki/figuras-planas
40. Saraiva Dantas, A. (2015)*The use of GeoGebra in the teaching of trigonometry: an experience with high school students.* Science and Nature, 37(3), 143-155. Recuperado el 19 de 01 de 2022, de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547643014
41. Schuwartz de Carvalho Faria, R. W., & Maltempi, M. V. (2019) *Mathematical Intradisciplinarity with GeoGebra in School Mathematics.* Bulletin of Mathematics Education, 33(63), 348-367. Recuperado el 26 de 01 de 2022, de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291265267019
42. Semirhan, G., & Pinar, G. (2022) *Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. Education and Information Technologies.* Recuperado el 31 de 01 de 2022, de https://doi.org/10.1007/s10639- 021-10836-1 TwinklCares. (26 of 07 of 2022). https://www.twinkl.es. Retrieved from https://www.twinkl.es: https://www.twinkl.es/teaching-wiki/figuras-planas
43. Vaillant, D., Zidán Rodríguez, E., & Biagas Bentancor, G. (2020) *Uso de plataformas y herramientas digitales para la enseñanza de la Matemática.* Essay: Evaluation and Public Policies in Education, 28(108), 1-23. Retrieved the 19th of 01 of 2022, of https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=399563646010
44. Valderrama, J., & Saldaña, M. (2020) *Influence of the Geogebra software on the academic performance of the students of the cycle I of the EAP Tourism in the course of Mathematical ComplementUNASAM,2017-I.* Pakamuros Magazine, 8(2) , 77-84.
45. Villagrán, C. W., Cruz, S. E., Barahona, A. F., Barrera, C. O., & Insuasti, C. R. (2018) *Use of GEOGEBRA as a methodological tool in the teaching of Analytical geometry and its impact on the control of the academic performance of students of the first semester of engineering.* Revista cientifica, Dominio de las ciencias Vol. 4, no. 4, 128-144. Retrieved 05/02/2022, from http://dx.doi.org/10.23857/dom.cien.pocaip.2018.vol.4.n.215-223
46. Wentworth, J., & Smith, D. E. (1951) *Plane and space geometry. New York: Ginn and Company.*

Capítulo 38
Secretos aritméticos en el Triángulo de Pascal

Mario Pineda Ruelas

Resumen

Es inevitable hablar del principio de inducción en matemáticas. En el curso de la plática aparecen las definiciones inductivas y obligadamente aparecen, entre otros, los coeficientes binomiales. Con propiedades que satisfacen éstos, construimos el célebre triángulo de Pascal y descubriremos en él, algunas sucesiones conocidas. Esta charla la he diseñado para jóvenes de bachillerato, incluyendo a jóvenes de primer año de licenciatura en matemáticas o ingeniería.

Palabras Claves

Inducción en Matemáticas, Triángulo de Pascal.

Referencias

1. Sominski I.S. *Método de inducción matemática*. Editorial MIR, Moscú, 2da edición 1985.

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Ciudad de México, México, e-mail: mpr@xanum.uam.mx

Capítulo 39
Ramificación en un campo diédrico de grado 8

Mario Pineda Ruelas

Resumen

En esta plática voy a describir explícitamente, para cada primo racional q, la ramificación de los ideales $q\mathbb{Z}$ en el anillo de enteros de un campo de números con grupo de Galois el grupo diédrico D_8.

Palabras Claves

Ramificación, campos de números.

Referencias

1. Pérez-Hernández J. and Pineda-Ruelas M. *Ramification in quartic cyclic number fields K generated by* $x^4 + px^2 + p$. Mathematica Bohemica No.4,471-481, 2021.
2. Pérez-Hernández J. and Pineda-Ruelas M. Ramification in octic dihedral fields. submitted to Ramanujan Journal of Mathematics. 2023.

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Ciudad de México, México, e-mail: mpr@xanum.uam.mx

Capítulo 40
Some Degenerated Hermite Polynomials

William Ramírez, Clemente Ceserano

Resumen

In this talk, we introduce a novel generalization of degenerate Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, and Apostol-Genocchi Hermite polynomials at level m. We establish both algebraic and differential properties for these new degenerate polynomial classes, and we demonstrate these results using generating-function techniques for Apostol-Euler and Apostol-Genocchi Hermite polynomials at level m.

This is a joint work with Cesarano, C, Ramírez, W, Díaz, S, Shamaoon, A and Khan, W.A.

Palabras Claves

Hermite polynomials; Apostol-type polynomials; degenerate Apostol-type polynomials.

Referencias

1. Cesarano, C.; Ramírez, W. Some new classes of degenerated generalized Apostol-Bernoulli, Apostol–Euler and Apostol-Genocchi polynomials. *Carpathian Math. Publ.* **2022**, *14*, 354–363.
2. Bedoya, D.; Cesarano, C.; Díaz, S.; Ramírez, W. New Classes of Degenerate Unified Polynomials. *Axioms* **2023**, *12*, 21.

Universidad de la Costa-International Telematic University, Barranquilla, Colombia, Roma, Italia, e-mail: wramirez4@cuc.edu.co,clemente.cesarano@uninettunouniversity.net

3. Cesarano, C.; Ramírez, W.; Khan, S. A new class of degenerate Apostol-type Hermite polynomials and applications. *Dolomites Res. Notes Approx.* **2022**, *15*, 10.
4. Khan, W.A. A note on degenerate Hermite poly-Bernoulli numbers and polynomials. *J. Class. Anal.* **2016** *8*, 65–76.
5. Cesarano, C, Ramírez, W, Díaz, S, Shamaoon, A and Khan, W.A. On Apostol-Type Hermite Degenerated Polynomials. Mathematics. **2023**.

Capítulo 41
Construcción de Hartman-Mycielski y Compacidad

Boris Enrique Reyes Cassiani

Resumen

Un grupo algebráico $(G, \cdot)$ con una topología τ, es llamado un grupo semitopológico si ocurre que el producto en G es separadamente continuo, esto es, para cada $g \in G$, las traslaciones $\lambda_g : G \to G$ y $\varrho_g : G \to G$ dadas por $\lambda_g(x) = gx$ y $\varrho_g(x) = xg$ son continuas. Mejoras adicionales a esta propiedad como que el producto, $\cdot : G \times G \to G$ sea continuo al considerar que $G \times G$ tiene la topología producto, o que la inversión en G, $In : G \to G$ definida por $In(g) = g^{-1}$, sea continua, dan lugar a los conceptos de grupo paratopológico y grupo quasitopológico, respectivamente. Un grupo G que es a la vez un grupo paratopológico y quasitopológico es llamado un grupo topológico. Los grupos topológicos y demás estructuras del álgebra topológica definidas anteriormente están presentes en cualquier rama de las matemáticas. A lo largo de los años el estudio de los grupos topológicos ha demostrado que en general poseen mejores propiedades que los espacios topológicos. Sin embargo, no han dejado de aportar también ejemplos y contraejemplos muy importantes en topología general.

En 1958 los matemáticos S. Hartman y J. Mycielski probaron que cualquier grupo topológico G, es topologicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un grupo topológico conexo, localmente conexo $G^\bullet$. El grupo topológico G está encajado en $G^\bullet$ de una manera muy especial, esto es, $G^\bullet$ hereda propiedades topológicas de G como la metrizibilidad, separabilidad, ω-estrechez, etc y algebráicas como ser abeliano, divisible, torsión entre otras. También se probaron que $G^\bullet$ nunca es compacto ni pseudocompacto salvo el caso $|G| = 1$.
En esta charla presentaremos algunas propiedades que topológicas que no se heredan directamente del grupo topológico G o que nunca se heredan salvo el caso que $|G| = 1$. Ya que las propiedades de tipo compacidad no se preservan en la construcción

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa-México, e-mail: Cbi2212801595@xanum.uam.mx

presentada por S. Hartman y J. Mycielski, presentaremos algunas propiedades de los subconjuntos y subgrupos compactos, pseudocompactos y contablemente compactos de $G^{\bullet}$.

Palabras Claves

Grupos topológicos, compacidad, pseudocompacidad, contablemente compacto.

Referencias

1. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures,Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press/World Scientic, Paris-Amsterdam, 2008.
2. S. Hartman and J. Mycielski, On embedding of topological groups into connected topological groups, Colloq. Math. 5 (1958) 167-169.
3. M. Bruguera, C. Hernández, and M. Tkachenko, Raĭkov completion and the Hartman-Mycielski construction, restricted to metrizable topological groups, Houston Journal of Mathematics Volume 36, No. 1, 2010.
4. M. López and I. Sánchez, Lindelöfness and Čech-completeness in the construction of Hartman-Mycielski, Volume 47, Number 1, 2021, Pages 263-270.
5. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

Capítulo 42
Cuerpos Sólidos Análisis y Construcción

Julio Romero Pabon, Gabriel Vergara Rios

Resumen

Los cuerpos sólidos son figuras geométricas tridimensionales que tienen volumen y ocupan un lugar en el espacio. Estas figuras se caracterizan por tener tres dimensiones: longitud, profundidad y altura. A diferencia de las figuras geométricas planas, los cuerpos sólidos tienen superficies curvas o planas que limitan su forma. Los cuerpos sólidos se pueden clasificar en dos categorías principales: poliedros y cuerpos redondos.

Palabras Claves

Sólidos, figuras geométricas, espacio, superficies.

Referencias

1. Romero, J. (2023) *Didáctica de la Geometría*. Universidad del Atlántico., Barranquilla, Colombia.
2. Kindle, J. (2008) *Geometría Analítica Plana y del Espacio*. Serie de Compendios Schaum. Editorial Mc. Graw Hill. Colombia.
3. Lehmann, C. (1980) *Geometría Analítica*. Editorial Limusa y Noriega Editores. Colombia.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: juliromero@mail.uniatlantico.edu.co, gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 43
Cuerpos Geométricos y Poliedros

Julio Romero Pabon, Gabriel Vergara Rios

Resumen

Un poliedro es una figura geométrica tridimensional que tiene caras planas y que encierra un volumen finito. Está limitado por polígonos, que son las caras del poliedro. Los poliedros se pueden clasificar en dos categorías principales: poliedros regulares y poliedros irregulares. Los poliedros regulares son aquellos que tienen caras regulares y congruentes, y sus ángulos son iguales. Los poliedros irregulares, por otro lado, tienen caras que no son regulares ni congruentes. Entre los ejemplos de poliedros regulares se encuentran el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. El tetraedro es un poliedro con cuatro caras triangulares, mientras que el cubo es un poliedro con seis caras cuadradas. El octaedro tiene ocho caras triangulares, mientras que el dodecaedro tiene doce caras pentagonales y el icosaedro tiene veinte caras triangulares.

Palabras Claves

Poliedro, sólidos, figuras polígonos, espacio, superficies.

Referencias

1. Romero, J. (2023) *Didáctica de la Geometría*. Universidad del Atlántico., Barranquilla, Colombia.
2. Kindle, J. (2008) *Geometría Analítica Plana y del Espacio*. Serie de Compendios Schaum. Editorial Mc. Graw Hill. Colombia.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: juliogromero@mail.uniatlantico.edu.co, gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co

3. Lehmann, C. (1980) *Geometría Analítica*. Editorial Limusa y Noriega Editores. Colombia.

Capítulo 44
La Geometría y el Sistema Solar

Julio Romero Pabon, Gabriel Vergara Rios

Resumen

Una elipse es una figura geométrica que tiene la forma de un óvalo más o menos achatado y es la órbita típica de los objetos que giran alrededor de un centro de gravedad como lo hacen, por ejemplo, los planetas con el Sol. La mayoría de los cuerpos del sistema solar, incluyendo planetas, cometas y asteroides, siguen trayectorias elípticas aunque con excentricidades muy diferentes.

Palabras Claves

Elipse, , órbita, sistema solar, excentricidad, planetas.

Referencias

1. Romero, J. (2023) *Didáctica de la Geometría*. Universidad del Atlántico., Barranquilla, Colombia.
2. Kindle, J. (2008) *Geometría Analítica Plana y del Espacio*. Serie de Compendios Schaum. Editorial Mc. Graw Hill. Colombia.
3. Lehmann, C. (1980) *Geometría Analítica*. Editorial Limusa y Noriega Editores. Colombia.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia, e-mail: juliomero@mail.uniatlantico.edu.co, gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 45
Análisis de Supervivencia: Un estudio de Cohorte para el cáncer Colorrectal

Laura Marcela Rúa Yánez

Resumen

El análisis de supervivencia es un conjunto de técnicas estadísticas donde la variable de respuesta que se modela es el tiempo que transcurre entre el inicio del seguimiento del individuo hasta que ocurre el evento de interés, por ejemplo el tiempo hasta que muere un individio por alguna enfermedad, tiempo hasta que un estudiante deserte de alguna institución, entre otros, sin embargo, es muy común que los individuos abandonen el estudio antes de que se presente el evento, por lo que sólo se obtiene información parcial (censura) de la variable de interés y, el modelo en tal caso se debe realizar no paramétrico por la falta de información (Regresión de Cox).

En este cursillo, se pretende modelar la probabilidad de muerte en pacientes con cáncer colorrectal, teniendo en cuenta que esta es la segunda causa principal de muerte en todo el mundo. La variable de respuesta mide el tiempo transcurrido hasta que el paciente que sufre de cáncer colorrectal fallece.

Este tipo de eventos son de gran importancia en el área clínica y, por ello, investigadores como freireich et al. (1963) han usado esta técnica para dar solución a distintos problemas propios de las ciencias de la salud.

Palabras Claves

Supervivencia, Efectos no paramétricos, Regresión de Cox.

Universidad ECCI, Barranquilla-Colombia, e-mail: lruay@ecci.edu.co

Referencias

1. Birbaum ZW, Saunders SC (1969). A new Family of Life Distributions. *Journal of Applied Probability, **6**, 319-327* .
2. Drapper NR, Smith H (1998). Applied Regression Analysis. *John Wiley & Sons*
3.
4. Freireich, E. J., Gehan, E., Frei, E., Schroeder, L. R., Wolman, I. J., Anbari, R., Burgert, E. O., Mills, S. D., Pinkel, D., Selawry, O. S., Moon, J. H., Gendel, B. R., Spurr, C. L., Storrs, R., Haurani, F., Hoogstraten, B., and Lee, S (1963). *The Effect of 6-Mercaptopurine on the Duration of Steroid-Induced Remissions in Acute Leukemia: A Model for Evaluation of Other Potentially Useful Therapy.699–716.*
5. Rieck JR, NedelmanJR (1991). A log-linear Model for the Birbaum-Saunders distribution. *Tecnometrics.*
6. Vanegas LH, Paula GA (2014b). Log-Simmetric distributions: Statistical properties and Parameter estimation. *Brazilian Journal of probability and Statistics.*
7. Vanegas LH, Paula GA (2015). An extension of log-symmetric regression models: R codes and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*.
8. Vanegas LH, Paula GA (2015). Log-Symmetric Regression Models Using R. *Instituto de Matemática e Estatástica Universidad de São Paulo and Universidad Nacional de Colombia*.
9. Wood SN (2006). Generalized Additive Models: An Introduction with R.*Chapman & Hall, Boca Raton.*

Capítulo 46
Simetrías y λ-simetrías variacionales: aplicaciones a problemas de física e ingeniería

Adrián Ruiz, Concepción Muriel

Resumen

En la presente ponencia se aborda el estudio de técnicas de simetría y posteriores generalizaciones para obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un problema variacional.

En una primera parte de la charla nos centraremos en los resultados clásicos obtenidos por el matemático noruego Sophus Lie, quien introdujo el concepto de simetría variacional [1]. Mostraremos como el conocimiento de una simetría variacional para un problema variacional escalar de orden n permite reducir el order de la ecuación de Euler-Lagrange asociada en dos unidades. También expondremos el famoso Teorema de Noether [2], el cual asociada a cada simetría variacional una ley de conservación del sistema. Mostraremos también la aplicación de estos resultados clásicos a algunos problemas con interés en física e ingeniería, como por ejemplo el problema del movimiento de una peonza o el problema de Kepler 2-dimensional.

Posteriormente, presentaremos el concepto de λ-simetría variacional, el cual fue introducido en [3] (ver también [4]) como una generalización del concepto clásico de simetría variacional. La importancia de esta generalización radica en el hecho de que también pueden ser usadas para reducir en dos unidades el orden de ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a problemas variacionales escalares, incluso en el caso de ausencia de simetrías variacionales. Mostraremos asimismo las diferencias entre el proceso de reducción de orden asociado a una λ-simetría variacional y el proceso de reducción llevado a cabo con una simetría variacional. Finalmente, terminaremos la exposición con la aplicación de las λ-simetrías variacionales para la obtención de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que modelizan osciladores amortiguados cuya masa depende de la posición.

Universidad de Cádiz, Cádiz-España, e-mail: adrian.ruiz@uca.es, e-mail: concepcion.muriel@uca.es

Palabras Claves

simetría variacional, λ-simetría variacional, ecuación de Euler-Lagrange, problema variacional.

Referencias

1. Olver, P.J. (1993) *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer-Verlag, New York, EEUU.
2. Noether, E. (1918) "Invariante variationsprobleme". *Math. Phys. Kl.*, 235–257.
3. Muriel, C., Olver, P.J., Romero, J.L. (2006) "Variational $\mathcal{C}^\infty$-symmetries and Euler-Lagrange equations". *J. Differ. Equ.* V. 222, 164–184.
4. Ruiz, A., Muriel, C., Olver, P.J. (2018) "On the commutator of $\mathcal{C}^\infty$-symmetries and the reduction of Euler-Lagrange equations". *J. Phys. A: Math. Theor.* V. 51, 145202–1452223.
5. M. Zuluaga., *Operadores integrales de Hammerstein, su espectro y aplicaciones*. *Rev. Col. Math. Vol XVII. 73-98, 1983.*

Capítulo 47
Aplicación de los conjuntos difusos y los conjuntos flexibles en el diagnóstico del riesgo vocal

José Sanabria, Marinela Álvarez & Osmin Ferrer

Resumen

Las nuevas teorías matemáticas son cada vez más valoradas por su versatilidad en la aplicación de sistemas inteligentes que permiten la toma de decisiones y el diagnóstico en diferentes situaciones del mundo real. Esto es especialmente relevante en el campo de las ciencias de la salud, donde estas teorías tienen un gran potencial para diseñar soluciones eficaces que mejoren la calidad de vida de las personas. En los últimos años, se han realizado varios estudios de predicción como indicadores de disfunción vocal [3]. Sin embargo, el rápido aumento de nuevos estudios de predicción como resultado del avance de la tecnología médica ha dictado la necesidad de desarrollar métodos fiables para la extracción de conocimiento clínicamente significativo, donde naturalmente existen interacciones complejas y no lineales entre estos marcadores. Cada vez es más necesario centrar el análisis no sólo en la extracción de conocimientos, sino también en la transformación y el tratamiento de los datos para mejorar la calidad de la asistencia sanitaria. Herramientas matemáticas como la teoría de conjuntos difusos [4] y la teoría de conjuntos flexibles [1] se han aplicado con éxito para el análisis de datos en muchos problemas de la vida real en los que hay presencia de vaguedad e incertidumbre en los datos. Estas teorías contribuyen a mejorar la interpretabilidad de los datos y a tratar la incertidumbre inherente a los datos del mundo real, facilitando el proceso de toma de decisiones a partir de la información disponible. En este artículo, aplicamos la teoría de conjuntos flexibles y la teoría de conjuntos difusos para desarrollar un sistema de predicción basado en el conocimiento de la fonoaudiología [2]. Utilizamos información como la edad del paciente, la frecuencia fundamental y el índice de perturbación para estimar el riesgo de pérdida de voz en los pacientes. Nuestro objetivo es ayudar al fonoaudiólogo a determinar si el paciente requiere o no intervención en presencia de una voz en riesgo

---

Universidad de Sucre, Facultad de Educación y Ciencias, Departamento de Matemáticas, Sincelejo, Colombia, e-mail: jose.sanabria@unisucre.edu.co, marinela.alvarez@unisucre.edu.co, osmin.ferrer@unisucre.edu.co

o un resultado de voz alterado, teniendo en cuenta que un comportamiento excesivo e inapropiado de la voz puede dar lugar a manifestaciones orgánicas.

Palabras Claves

Riesgo vocal, conjunto difuso, conjunto flexible, fuzzificación, sistema experto.

Referencias

1. Molodtsov, D. A. (1999) "Soft set theory-first results". *Comput. Math. Appl.* V. 37, 19-31.
2. Sanabria, J., Álvarez, M., Ferrer, O. (2023) "Fuzzy set and soft set theories as tools for vocal risk diagnosis". *Submitted*.
3. Stemple, J. C., Roy, N., Klaben, B K. (2018) *Clinical voice pathology: Theory and management*. 6th Edition, Plural Publishing, San Diego, EEUU.
4. Zadeh, L. A. (1965) "Fuzzy sets". *Inform. Control* V. 8, 338–353.

Capítulo 48
Educación económica y financiera en familias de estudiantes en etapa escolar con condición socioeconómica vulnerable

Sonia Valbuena D., Carlos A. Vega

Resumen

The aim is to use a well-balanced discontinuous Galerkin method for one-dimensional blood flow models, which preserves the man-at-eternal rest and more general living-man equilibrium, the strategy used was from incorporating the source term into the flux function to rewrite the law of balance in conservative form in terms of global equilibrium variables. The conservative variables can be then recalculated from the equilibrium variables. Numerical tests are developed to verify the well-balanced property of the designed schemes and its ability to accurately capture small perturbations of steady states on relatively coarse meshes.

Palabras Claves

Well-balanced methods, blood flow models, non-trivial steady solutions.

Referencias

1. Carlos A. Vega., Sonia Valbuena D. (2022). *A well-balanced and entropy stable scheme for a reduced blood flow model*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. John Wiley - Sons, Inc. 39. 2491-2509 ,2022. https://doi.org/10.1002/num.22975
2. Mantri Y., Noelle S. (2021). *Wellbalanced discontinuous Galerkin scheme for 22 hyperbolic balance law*. J. Comput. Phys. 429, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.110011.

Universidad del Atlántico-Universidad del Norte, Barranquilla-Colombia, e-mail: soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Capítulo 49

Sobre una generalización de los polinomios Charlier-Poisson aplicados a los operadores tipo Brenke.

Javier Villa Herrera, Alejandro Urieles

Resumen

En este artículo se introduce una nueva familia de polinomios paramétricos tipo U-Charlier-Poisson $G_n^{[2+J]}(x;\alpha,\beta,\lambda)$, los cuales generalizan los polinomios clásicos de Charlier $C_n(x,\alpha)$. Además se estudian algunas propiedades como lo son su representación explicita, relación de ortogonalidad y su conexión con la derivada de la función armónica. Posteriormente se aplica la nueva familia de polinomios a los operadores tipo Brene para estudiar propiedades de convergencia utilizando el teorema de Korovkin.

Palabras Claves

polinomios de Charlier, teorema de Korovkin, operadores tipo Brenke.

Referencias

1. Chihara, T.S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York.
2. Gradshteyn, I.S. (1978). *Table of integrals, series and products*. Gordon and Breach, New York.
3. P. Korovkin.: *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions(Rusia)*, Doklady Akad. Nauk. **90** (1953), 961-964.
4. Nikiforov. A. F, Suslov. S. K & Uvarov. V. B. (1991). *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p. 387.

Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, e-mail: jevilla@mail.uniatlantico.edu.co, alejandrourieles@mail.uniatlantico.edu.co

5. O. Szasz.: *Generalization of S.Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J.Research Nat. Bur. Standards, **45** (1950), 239-245.
6. N. Ozmen and E. Erkus-Duman.: *ON THE POISSON-CHARLIER POLYNOMIALS*, Serdica Math, **J41** (2015) 458-470.
7. S. Varma and F. Tasdelen.: *Szazs type operators involving Charlier polynomials*, Mathematical and Computer Modelling, **56** (2012), 118-122.
8. S. Varma., Sezgin Sucu and Gurhan Icoz.: *Generalization of Szsa operators involving Brenke type polynomials*, Computers and Mathematics with Applications, **64** (2012), 121-127.
9. Adams, R. (1978) *Sobolev spaces*. Academic Press Inc., New York, EEUU.
10. Badkov, V. M. (1969) "The uniform convergence of Fourier series in orthogonal polynomials". *Math. Notes* V. 5, 174–179.

Capítulo 50
Derivadas Generalizadas, nuevas tendencias y resultados recientes

Miguel Vivas-Cortez

Resumen

El cálculo fraccional estudia la diferenciación e integración de orden real o complejo, y así esta es una generalización del cálculo usual, en los años recientes se han estudiados diversos enfoques en el estudio de lo que algunos autores llaman cálculo fraccional, otros llaman cálculo generalizado mientras que otros llaman operadores diferenciales generalizados. No hay un consenso en la definición de derivada fraccional, la derivada fraccional más estudiada es la derivada de Riemann-Liouville, esta derivada se obtiene realizando integración iterada, considerando la integral como la derivada de orden -1, y así hasta generalizar para valores incluso complejos (acá se usa la función gamma de Euler para generalizar el factorial, sin embargo, esta derivada no satisface la propiedad que la derivada de una constante sea cero, también han surgido otras nuevas derivadas en la literatura como la derivada de Caputo ([8]), en ambos casos estas derivadas estudian fenómenos con "memoria" puesto que ambas derivadas están definidas en términos de una integral, un enfoque diferente es el que han dado los autores que estudian la derivada modificando la definición (conocida como derivada de nuevos parámetros), estos son operadores diferenciales locales, entre las principales propuestas están la derivada de Khalil ([9]), la derivada Fractal ([1]) o la N-derivada([4]), así como la derivada multi-índices ([8]). Esta conferencia es una revisión breve de nuevos y viejos conceptos de derivadas generalizadas, estudiaremos la derivada fractal introducida por W. Chen en 2018, llamada derivada de Hausdorff -Chen, esta derivada relaciona la geometría fractal, con la medida de Hausdorff, en el cursillo haremos una revisión de las principales propiedades de esta derivada, así como de la integral asociada a dicha derivada, también estudiaremos una transformada de Laplace asociada a la derivada fractal.

Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, Ecuador, e-mail: mjvivas@puce.edu.ec

También haremos una revisión de una nueva derivada fractal introducida en 2022 por Sadek y Aloui ([3]), haremos una revisión de la derivada de Khalil y sus propiedades, así como una aplicación de esta derivada a la estadística.

Palabras Claves

Derivada Fractal, Transformada de Laplace.

Referencias

1. Chen, W., Hei. X., Sun. H, & Hu, D. (2018) *Stretched exponential stability of nonlinear Hausdorff dynamical systems*. Chaos, Solitons & Fractal, 109, 259-264.
2. Cai, W., Chen, W.,&Wang, F. (2018) *Three-dimensional Hausdorff derivative diffusion model for isotropic/anisotropic fractal porous media*.Thermal Science, 22 (Suppl. 1),1-6.
3. Alaoui, H., Sadek (2022) *TA new definition of the fractal derivative with classical properties*.HAL.
4. Guzman, P., Lugo, L., Nápoles Valdés, J., & Vivas-Cortez, M. (2020') *On a new generalized integral operator and certain operating properties. Axioms,*.9(2), 69. doi:10.3390/axioms9020069.
5. Vivas-Cortez, M., Nápoles Valdés, J., Hernández, J., Velasco, J. and Larreal, O. (2021) *On nonconformable fractional Laplace transform. Applied Mathematics & Information Sciences*.15(4), 403-409
https://doi.org/10.18576/amis/150401.
6. Vivas-Cortez, M., Lugo, L., Nápoles Valdés, J, Samei, M.E. (2022) *A Multi-Index Generalized Derivative; Some Introductory Notes. Applied Mathematics & Information Sciences,*.16(6), 883-890.
7. Vivas-Cortez, M., Kashuri, A., Liko, R. Hernández J. E. (2020) *Some New q-integral inequalities using generalized quantum Montgomery identity via preinvex functions. Symmetry* .12(4) 553
https://doi.org/10.3390/sym12040553
8. Caputo M. y Fabrizio M (2015) *A new definition of fractional derivative without singular kernel. Natural Sciences Publishing Cor., Progress in Fractional Differentiation and Applications,* .1:73-85,
9. R. Khalil, M. Al Horani, A. Youseff, M. Sababheh. (2014) *A new definition of fractional derivative, J. Computational and Applied Mathematics*.264, 65 - 70,